



REPOBLIKAN'I MADAGASIKARA
Fitiavana – Tanindrazana - Fandrosoana
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



UNIVERSITÉ D'ANTSIRANANA
ECOLE DOCTORALE THÉMATIQUE
ENERGIES RENOUVELABLES ET ENVIRONNEMENT

THESE

Pour obtenir le diplôme de
DOCTEUR DE L'UNIVERSITE D'ANTSIRANANA
Spécialité : **FLUIDES ET ENERGETIQUE**

CONVECTION MIXTE: FORCEE ET ROTATOIRE AUTOUR D'UN CONE DE REVOLUTION

Soutenue publiquement par

LETICIA Christine

Le 31 mars 2023

Devant le Jury composé de :

RAJAONAH Rabevala	Professeur Titulaire	Président
ALIDINA Edouard	Professeur Titulaire	Directeur
RANDRIAMANANTANY Zely Arivelo	Professeur Titulaire	Rapporteur
TOVONDRAINY Norbert	Maitre de Conférences	Rapporteur
RANDRIAZANAPARANY Michel Aimé	Professeur Titulaire	Examineur
RAMINOSOA Chrysostome	Professeur Titulaire	Examineur

AVANT-PROPOS

Ce travail a été effectué au sein du Laboratoire de Mécanique des Fluides et Systèmes Energétiques Appliqués dans la Faculté des Sciences de l'Université d'Antsiranana à Madagascar.

Que tout l'honneur soit à Monsieur le Professeur KALL BRILLANT, Président de l'Université d'Antsiranana.

J'adresse mes remerciements à Monsieur le Professeur RABEARIVONY Jeanneney, Doyen de la Faculté des Sciences de l'Université d'Antsiranana, pour les efforts qu'il déploie afin de développer la recherche au sein de la Faculté.

Je remercie très profondément à Monsieur le Professeur RAZAFINJAKA Nirinarison Jean, Directeur de l'École Doctorale Thématique de l'Université d'Antsiranana, et la Comité de suivi de thèse d'avoir bien voulu accepter ma soutenance. Que toute la grandeur de mes estime soit avec le Responsable éminent de l'établissement.

Je tiens à remercier Monsieur le Professeur RAMINOSOA Chrysostome, chercheur à l'Université d'Antsiranana et spécialiste en mécanique des fluides, dont ses conseils et son soutien l'Université m'ont été d'une grande utilité.

Je remercie particulièrement le Professeur ALIDINA Edouard, mon Directeur de thèse et en tant que co-directeur. J'exprime toute ma gratitude pour ses encadrements efficaces, ses précieux conseils et la confiance qu'il m'a témoigné et par la même occasion je rends hommage à ses rigueurs scientifique et technique.

Je remercie très profondément Monsieur le Professeur RAJAONAH Rabevala, de m'avoir fait l'honneur de présider le jury de cette thèse.

Mes vifs remerciements à tous les membres de Jury. Je rends mille grâces à leurs dignités et responsabilités.

J'exprime toutes mes reconnaissances à Madame la Professeure RANDRIAMANANTANY Zely Arivelo, Chef de Département de Physique de la Faculté des Sciences de l'Université d'Antananarivo et Monsieur TOVONDRAINY Norbert Maître de conférences, d'avoir accepté d'être les rapporteurs externe et interne de ma thèse et pour le soutien qu'ils m'ont apporté dans de nombreuses situations. Je leur rends hommage pour leurs esprit critique et scientifique.

Je remercie également Monsieur le Professeur RANDRIAZANAMPARANY Michel Aimé, chercheur à l'Université d'Antsiranana et spécialiste en mécanique des fluides, dont ses conseils et son soutien m'ont été d'une grande utilité. Je lui exprime ma reconnaissance pour la mesure d'assistance dont il a fait preuve tout le long de cette étude.

Je remercie tout particulièrement Docteur Ulrich CANISSIUS pour son précieux aide et ses conseils, j'en suis très reconnaissante

Mes plus amples remerciements très sincères vont également à toutes mes reconnaissances, à toute l'équipe du Laboratoire de MFSEA pour leurs accueils chaleureux, leur précieux aide et les nombreuses discussions qui touchaient tous les domaines avec lesquelles j'ai eu d'excellents rapports. Je remercie tout particulièrement Docteur RAKOTOMANGA François d'Assise pour

l'aide indirecte qu'il m'a apportée. En témoignage de reconnaissance, j'exprime notamment mes vifs remerciements à mes parents et mon unique fils FIGUELIA Ya'Sin qui n'ont jamais cessé de me soutenir durant tout le long de mes recherches, ainsi que tous les membres de ma famille pour leur soutien permanent.

Je n'oublie pas de remercier tous mes collègues, de promotion et de formation qui ont beaucoup contribué à ma réussite. Qu'ils trouvent ici la grandeur de ma gratitude et particulièrement une amie de confiance et intime pour ses contributions locale et étrangère lors de la publication des articles dans des revues de notoriétés internationales. Dans cette occasion, je rends hommage à toutes les personnes qui ont témoigné leurs confiances.

À tous ceux et celles qui de près ou de loin m'ont permis de bien mener à terme mes recherches, je leur dis : Merci.

TABLE DES MATIERES

AVANT-PROPOS	i
NOMENCLATURE	v
Lettres latines.....	v
Lettres grecques.....	v
Indice ou exposant.....	vi
INTRODUCTION	1
ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE	3
Chapitre 1 DESCRIPTION ET FORMULATION MATHEMATIQUE DU PROBLEME.....	5
1.1 Modèle physique et hypothèses simplificatrices	5
1.1.1 Description du problème.....	5
1.1.2. Hypothèses simplificatrices.....	5
1.2 Modèle mathématique.....	6
1.2.1 Equations de transfert dans la couche limite	6
1.2.2 Nombre de Nusselt et coefficients de frottements.....	9
Chapitre 2 ADIMENSIONNALISATION DES EQUATIONS	10
2.1 Cas où la convection forcée est prédominante	10
2.1.1 Variables adimensionnelles.....	10
2.1.2 Equations adimensionnelles.....	10
2.1.3 Expression du nombre de Nusselt et des coefficients de frottement	11
2.2 Cas où la convection rotatoire est prédominante	12
2.2.1 Variables adimensionnelles.....	12
2.2.2 Equations adimensionnelles.....	13
2.2.3 Expression du nombre de Nusselt et des coefficients de frottement	13
2.3 Généralisation.....	14
2.3.1 Equations de transferts généralisés adimensionnelles	16
2.3.2 Expression du nombre de Nusselt et des coefficients de frottement généralisés.....	17
Chapitre 3 DISCRETISATION	19
3.1 Méthode générale de la discrétisation.....	19
3.1.1 Première étape : choix de la méthode utilisée et maillage du domaine.....	19
3.1.2 Deuxième étape : approximation des dérivées partielles	20
3.2 Discrétisation des équations de la couche limite	21
3.2.1 Equations de transferts généralisés discrétisées	21
3.2.2 Nombre de Nusselt et des coefficients de frottement généralisés discrétisés.....	23
3.3 Méthode de résolution.....	23

3.3.1 Calcul de la température dans la couche limite, et des composantes méridienne et azimutale de la vitesse	23
3.3.2 Calcul de la composante normale de la vitesse	24
3.3.3 Algorithme de résolution	25
3.3.4 Calcul du nombre de Nusselt et des coefficients de frottement	26
3.3.5 Algorithme et organigramme de calcul	26
Chapitre 4 PRESENTATION DES RESULTATS DES CALCULS RELATIFS A LA COUCHE LIMITE	29
4.1 Résultats numériques et discussions	29
4.1.1 Choix de discrétisation et validation	29
4.1.1.1 Choix de discrétisation	29
4.1.2 Ecoulement axisymétrique $\alpha = 0$	30
4.1.3 Ecoulement dissymétrique $\alpha \neq 0$	41
CONCLUSION	81
ANNEXE	87
A1.1 Rappels de quelques éléments mathématiques	87

NOMENCLATURE

Lettres latines

a : diffusivité thermique du fluide [$\text{m}^2.\text{s}^{-1}$]

A_x, B_x : paramètre de la composante suivant ϕ de la vitesse d'écoulement potentiel au tours du cône

A_ϕ : paramètre de la composante suivant x de la vitesse d'écoulement potentiel au tours du cône

B : paramètre de rotation

Cf_u : coefficient de frottement méridien

Cf_w : coefficient de frottement azimutal

C_p : capacité calorifique massique à pression constante du fluide [$\text{J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$]

Ec : nombre d'Eckert

h : coefficient de transfert [$\text{W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$]

L : longueur de référence égale à la longueur de la génératrice du cône [m]

N_u : nombre de Nusselt local

P : pression [Pa]

Pr : nombre de Prandtl

r : distance normale du projeté M d'un point P du fluide à l'axe de révolution (Δ) du cône [m]

Re_∞ : nombre de Reynolds relatif à la vitesse U_∞

Re_ω : nombre de Reynolds de rotation relatif à la vitesse de rotation Ω

T : température du fluide [K]

T_p : température de la paroi [K]

T_∞ : température du fluide loin de la paroi [K]

$U_e, U_{ex}, U_{e\phi}$: magnitude, composante suivant x , composante suivant ϕ de la vitesse d'écoulement potentiel autour du cône [m.s^{-1}]

U_∞ : vitesse de l'écoulement en amont du corps [m.s^{-1}]

V_x, V_y, V_ϕ : composantes méridienne, normale et azimutale de la vitesse dans la couche limite [m.s^{-1}]

x, y : coordonnées méridienne et normale du système [m]

Lettres grecques

α : angle d'inclinaison [$^\circ$]

θ_0 : demi-angle d'ouverture du cône [$^\circ$]

ϕ : coordonnée azimutale du système [$^\circ$]

λ : conductivité thermique du fluide [$\text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$]

μ : viscosité dynamique du fluide [$\text{kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$]

ν : viscosité cinématique du fluide [$\text{m}^2.\text{s}^{-1}$]

ρ : masse volumique du fluide [kg.m^{-3}]

τ_{px} : contrainte de frottement suivant x [$\text{kg}^{-1}.\text{s}^{-2}$]

$\tau_{p\varphi}$: contrainte de frottement suivant φ [$\text{kg}^{-1}.\text{s}^{-2}$]

Indice ou exposant

+ : grandeurs adimensionnelles

LISTE DES FIGURES

- [1] - Figure 1.1 : Représentation schématique du modèle physique
- [2] - Figure 3.1 : Représentation schématique du maillage de la couche limite
- [3] - Figure 3. 2 : Représentation schématique du processus de calcul.
- [4] - Figure 4. 0 : Comparaison du coefficient de frottement pariétal en fonction de x_+ , pour $B=0$ $\alpha = 20^\circ$, $\varphi = 0^\circ$ et $\theta_0 = 20^\circ$
- [5] - Figure 4.1: Evolution de la vitesse méridienne adimensionnelle en fonction de x_+ pour plusieurs valeurs de B .
- [6] - Figure 4.2 : Evolution de la vitesse méridienne adimensionnelle en fonction de y_+ pour $\theta_0 = 20^\circ$, $\varphi = 60^\circ$, $\alpha=0^\circ$ et plusieurs valeurs de B .
- [7] - Figure 4.3: Evolution de la vitesse méridienne adimensionnelle en fonction de y_+ pour $\theta_0 = 20^\circ$, $\varphi = 60^\circ$ et plusieurs valeurs de Ip .
- [8] - Figure 4.4 : Evolution de la vitesse méridienne adimensionnelle en fonction de y_+ , pour $Ip=13$, $B=0,1$ et pour plusieurs valeurs de φ .
- [9] - Figure 4.5 : Evolution de la vitesse méridienne adimensionnelle en fonction de φ_+ , pour $\alpha=0^\circ$, $B=0,1$ et plusieurs valeurs de Ip
- [10] - Figure 4.6 : Evolution de la température adimensionnelle T^+ en fonction de x_+ pour $\theta_0 = 20^\circ$, $\varphi = 60^\circ$ et plusieurs valeurs de B .
- [11] - Figure 4.7: Evolution de la température adimensionnelle T^+ en fonction de y_+ pour $\theta_0 = 20^\circ$, $\varphi = 60^\circ$ et plusieurs valeurs de B ,.
- [12] - Figure 4.8: Evolution de la température adimensionnelle T^+ en fonction de y_+ pour $\theta_0 = 20^\circ$, $\varphi = 60^\circ$ et plusieurs valeurs de Ip ,.
- [13] - Figure 4.9 : Evolution du nombre de Nusselt en fonction de x_+ pour Ec fixé, $\alpha=0$, et plusieurs valeurs de paramètre de rotation B .
- [14] - Figure 4.10: Evolution du coefficient de frottement pariétal méridien en fonction de x_+ , pour $Ip=5$, $\varphi=60^\circ$, $\alpha=0$ et plusieurs valeurs de paramètre de rotation B
- [15] - Figure 4.11 : Evolution de la vitesse méridienne adimensionnelle en fonction de y_+ pour $\theta_0 = 10^\circ$, $\varphi = 60^\circ$, $\alpha=10^\circ$ et plusieurs valeurs de B .
- [16] - Figure 4.12 : Evolution de la vitesse méridienne adimensionnelle en fonction de y_+ pour $\theta_0 = 20^\circ$, $\varphi = 60^\circ$, $\alpha=10^\circ$ et plusieurs valeurs de B .
- [17] - Figure 4.13: Evolution de la vitesse méridienne adimensionnelle en fonction de y_+ pour $\theta_0 = 30^\circ$, $\varphi = 60^\circ$, $\alpha=10^\circ$ et plusieurs valeurs de B .
- [18] - Figure 4.14 : Evolution de la vitesse méridienne adimensionnelle en fonction de y_+ pour $\varphi = 60^\circ$, $\alpha=10^\circ$ et plusieurs valeurs de l'angle d'ouverture θ° .
- [19] - Figure 4.15: Evolution de la vitesse méridienne adimensionnelle en fonction de y_+ , pour α fixé et plusieurs valeurs de Ip .

- [20] - Figure 4.16 : Evolution de la vitesse méridienne adimensionnelle en fonction de φ^+ , pour plusieurs valeurs angles d'inclinaison α
- [21] - Figure 4.17 : Evolution de la vitesse méridienne adimensionnelle en fonction de φ^+ , pour plusieurs angles d'ouverture θ_0
- [22] - Figure 4.18: Evolution de la vitesse méridienne adimensionnelle en fonction de φ^+ , pour plusieurs valeurs de paramètre de rotation B
- [23] - Figure 4.19: Evolution de la vitesse méridienne adimensionnelle en fonction de φ^+ , pour plusieurs valeurs de I_p
- [24] - Figure 4.20: Evolution de la vitesse normale adimensionnelle en fonction de x_+ pour $\theta_0 = 20^\circ$, $\varphi = 60^\circ$ et plusieurs valeurs de B.
- [25] - Figure 4.21: Evolution de la vitesse normale adimensionnelle en fonction de y_+ pour plusieurs valeurs de B.
- [26] - Figure 4.22 : Evolution de la vitesse normale adimensionnelle en fonction de y_+ pour $\varphi=60^\circ$ et plusieurs valeurs de I_p .
- [27] - Figure 4.23: Evolution de la vitesse normale adimensionnelle en fonction de y_+ pour $\theta_0 = 20^\circ$, $B=1,5$ et plusieurs valeurs de I_p , $\varphi = 60^\circ$
- [28] - Figure 4.24: Evolution de la vitesse normale adimensionnelle en fonction de y_+ pour $\theta_0 = 20^\circ$, $\varphi = 60^\circ$ et plusieurs valeurs de I_p .
- [29] - Figure 4.25: Evolution de la vitesse normale adimensionnelle en fonction de y_+ , pour $I_p=13$, $B=0,1$ et pour plusieurs valeurs de φ .
- [30] - Figure 4.26: Evolution de la vitesse normale adimensionnelle en fonction de y_+ , pour $I_p=2$, $B=0,2$ et pour plusieurs valeurs de l'angle d'ouverture du cône θ° .
- [31] - Figure 4.27 : Evolution de la vitesse normale adimensionnelle en fonction de φ^+ , pour plusieurs valeurs de paramètre de rotation B
- [32] - Figure 4.28: Evolution de la vitesse normale adimensionnelle en fonction de φ^+ , pour plusieurs valeurs de l'angle d'inclinaison α
- [33] - Figure 4.29: Evolution de la vitesse normale adimensionnelle en fonction de φ^+ , pour plusieurs valeurs de l'angle d'ouverture θ_0
- [34] - Figure 4.30: Evolution de la vitesse normale adimensionnelle en fonction de φ^+ , pour plusieurs valeurs de I_p
- [35] - Figure 4.31: Evolution de la température adimensionnelle T^+ en fonction de y_+ pour plusieurs valeurs de B.
- [36] - Figure 4.32 : Evolution de la vitesse méridienne adimensionnelle en fonction de y_+ pour $\varphi = 60^\circ$, $\alpha=10^\circ$ et plusieurs valeurs de l'angle d'ouverture θ° .
- [37] - Figure 4.33: Evolution de la température adimensionnelle T^+ en fonction de y_+ pour $\theta_0 = 10^\circ$, $\alpha=10^\circ$, $\varphi = 60^\circ$ et plusieurs valeurs de I_p .
- [38] - Figure 4.34: Evolution de la température adimensionnelle T^+ en fonction de y_+ pour $\theta_0 = 20^\circ$, $\alpha=10^\circ$, 8 FV54 $\varphi = 60^\circ$ et plusieurs valeurs de I_p .
- [39] - Figure 4.35: Evolution de la température adimensionnelle T^+ en fonction de y_+ pour $\theta_0 = 5^\circ$, $\alpha=10^\circ$, $\varphi = 60^\circ$ et plusieurs valeurs de I_p .

- [40] - Figure 4.36: Evolution de la température adimensionnelle T^+ en fonction de y_+ pour $\varphi = 60^\circ$ et plusieurs valeurs de I_p .
- [41] - Figure 4.37: Evolution de la température adimensionnelle en fonction de φ_+ , pour plusieurs valeurs de paramètre de rotation B
- [42] - Figure 4.38: Evolution de la température adimensionnelle en fonction de φ_+ , pour plusieurs valeurs de l'angle d'inclinaison α
- [43] - Figure 4.39: Evolution de la température adimensionnelle en fonction de φ_+ , pour plusieurs valeurs de l'angle d'ouverture θ_0
- [44] - Figure 4.40: Evolution de la température adimensionnelle en fonction de φ_+ , pour plusieurs valeurs de I_p
- [45] - Figure 4.41: Evolution du nombre de Nusselt en fonction de x_+ , pour $Ec=0,02$ et plusieurs valeurs de paramètre de rotation B
- [46] - Figure 4.42: Evolution du nombre de Nusselt en fonction de x_+ , pour $Ec=0,02$ et plusieurs valeurs de φ .
- [47] - Figure 4.43: Evolution du coefficient de frottement pariétal méridien en fonction de x_+ , pour plusieurs valeurs de paramètre de rotation B .
- [48] - Figure 4.44: Evolution du coefficient de frottement pariétal méridien en fonction de x_+ , pour plusieurs valeurs de φ
- [49] - Figure 4.45: Evolution du coefficient de frottement azimuthal en fonction de φ_+ , pour plusieurs valeurs de paramètre de rotation B
- [50] - Figure 4.46: Evolution du coefficient de frottement azimuthal en fonction de φ_+ , pour plusieurs valeurs de paramètre de rotation B

LISTE DE TABLEAUX

[1] - Tableau 2.1: Les variables adimensionnels de contribution individuelle ou simultanée d'une prédominance.

[2] - Tableau 2.2: Valeurs des grandeurs C_i , $1 \leq i \leq 5$ selon les types de convection mixte.

INTRODUCTION

L'étude de transfert thermique et impulsif entre le fluide et la paroi est très intéressante dans le domaine de la mécanique des fluides et fait l'objet de nombreux travaux théoriques et pratiques à cause de leur importance dans des parties technologiques et mécanique de fluides. En plus des différents paramètres physiques influençant les phénomènes de transferts, la géométrie du corps (cône), sa disposition (incliné) ainsi que la forme des parois délimitant les domaines d'étude engendrent des effets considérablement importants sur les transferts thermiques entre la paroi et le fluide.

Dans la réalité, on distingue deux types de convection forcée : la convection forcée dans des enceintes fermées dont les parois sont soumises à des températures ou à des flux imposés, et la convection forcée externe se développant au voisinage d'une paroi soumise à un chauffage ou un refroidissement, et objet d'une partie de notre travail de recherche.

En entrant dans le domaine et de processus industriel, les transferts convectifs au voisinage d'un corps à symétrie de révolution : cône [1 - 13], sphère [14 - 25, 39], ellipsoïde [27 - 29] et cylindre [30, 31], ont été étudiés. Sur ces travaux, on trouve les cas où la convection est purement naturelle, rotatoire ou forcée, la plupart sont la combinaison de deux ou trois types de convection.

Toutefois, cette étude s'articule sur une autre question de recherche dans le cas où l'axe de révolution du corps est incliné par rapport à la verticale. Alors, face à cette question, nous avons investi dans l'espérance d'apporter un élément de réponse dans « La convection mixte : forcée et rotatoire » qui s'inscrit dans la simulation numérique des phénomènes de transfert par convection autour d'un obstacle en rotation.

Ce travail, dont l'objectif est d'analyser l'influence sur les transferts thermiques du paramètre de rotation, de l'angle d'inclinaison et de l'angle d'ouverture du cône dans une étude numérique de la convection mixte (forcée et rotatoire). Ces équations se présentent sous forme d'équations différentielles partielles résultant des principes de conservation de la masse (équation de continuité), de quantité du mouvement (équation de Navier-Stokes) et de l'énergie (équation de la chaleur). Dans cette étude, nous avons également l'intérêt d'analyser le couplage des deux convections prédominantes qui se développent dans la couche limite externe de ce système.

Dans le cadre de cette étude, nous considérons un écoulement d'un fluide newtonien autour d'un cône de révolution en rotation autour de son axe. L'écoulement est ascendant, de type couche limite et les transferts sont permanents et tridimensionnel. On se propose de résoudre numériquement les équations régissant les transferts de chaleur et de masse par convection mixte. Nous analysons l'influence du paramètre de rotation B , de l'angle d'inclinaison α et d'angle d'ouverture θ_0 sur les transferts et nous déterminons des corrélations décrivant les transferts en fonction de ce paramètre. Les équations gouvernantes sont résolues à l'aide de la méthode implicite aux différences finies basée sur la méthode de factorisation couplée à l'algorithme de Thomas. Les résultats sont présentés sous forme de profils de vitesses, de température ainsi que de nombre local de Nusselt et des coefficients de frottements.

La thèse est organisée comme suit :

Dans le premier chapitre, nous définissons la description et la formulation mathématique du problème avec les hypothèses simplificatrices, les équations gouvernant les transferts

d'impulsion et de chaleur dans la couche limite, les conditions aux limites associées, ainsi que les expressions du nombre de Nusselt et des coefficients de frottements.

Le deuxième chapitre concerne l'adimensionnalisation des équations de transferts et des conditions aux limites. Nous avons établi les équations adimensionnelles pour chaque type de prédominance et ensuite la convection mixte.

L'exposée de la méthodologie numérique retenue pour résoudre les équations formulées dans le chapitre précédent fait l'objet du troisième chapitre. Nous avons détaillé la discrétisation des équations de transfert et des conditions aux limites ainsi que la méthode adoptée pour résoudre le système d'équations algébriques déduites de la discrétisation, à l'aide d'une méthode implicite aux différences finies.

Et enfin, le quatrième chapitre est consacré à la présentation et à l'interprétation des résultats obtenus sous forme de courbes interprétant les synergies de la prédominance.

Cette étude est applicable à une éolienne à axe horizontal (cas du cône rigide). L'énergie éolienne est une énergie renouvelable, et par définition, l'éolienne est un système captant l'énergie cinétique du vent, converti en mécanique et de la transformer en électricité.

Dans ce cas, le cône rigide sur les turbines à vent de petite et moyenne puissance est plongé dans un écoulement naturel, forcé et rotatoire. À l'égard de cela, notre travail contribue certainement à l'axe de recherche des énergies renouvelables et de ses impacts sur les milieux sociaux.

ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE

Beaucoup de travaux ont été publiés sur la convection que ce soit naturelle ou forcée autour d'un cône de révolution vertical aussi bien que la paroi du cône soit uniforme ou non, qu'elle soit maintenue à une température constante ou soumise à un flux de chaleur et que ce cône soit immobile ou tournant autour de son axe de révolution.

Canissius [1] et Siabdallah et *al.* [5] ont confirmé les effets de la compressibilité dans la convection naturelle laminaire autour d'un cône vertical et montré que les transferts thermiques pour un cône à paroi lisse sont supérieurs à ceux obtenus pour un cône à paroi ondulée et qui avait été proposés par Pop et *al.* [6]. Plus tard, F. A. Rakotomanga [7] a proposé deux programmes informatiques qui permettent de déterminer, en premier la vitesse à la frontière extérieure de la couche limite autour d'un cône de révolution à l'aide de la méthode des singularités. Le second s'articule sur les distributions des vitesses et des températures ainsi que les valeurs locales des coefficients de frottements et de nombre de Nusselt dans la couche limite à l'aide de la méthode des différences finies. Pour le cas des transferts thermiques autour d'un cône incliné, F. A. Rakotomanga et *al.* [8] ont abordé l'étude de l'influence de l'angle d'inclinaison du cône sur les écoulements et les transferts thermiques entre la paroi et le fluide par convection forcée. Ils ont montré que l'accroissement de l'angle d'inclinaison atténue l'échange thermique entre la paroi et le fluide d'une part et engendre une légère augmentation de l'épaisseur de la couche limite, d'autre part.

A l'égard de ces traitements, les auteurs comme Raminosoa et *al.* [15], ont analysé la superposition de trois types de convection sur une sphère et ils ont proposé des corrélations décrivant les équations de transferts en fonction des paramètres qui correspondent à chaque type de convection. En général, l'étude convective d'un corps tournant autour de son axe de révolution reste habituellement verticale. Dans un système de couplage mixte, en vertu d'une présence de rotation du corps, les grandeurs physiques semblent consistantes avec une vitesse angulaire importante, et présentent une corrélation en croissance, comme présentée par Le Palec [18] et Ouldhadda [26]. L'auteur et ses contributeurs utilisaient la méthode aux différences finies pour ses résolutions. Entre autres, Alidina [27] traitait ses équations également par cette méthode.

Par la suite, le travail de E. A. Brun et ses contributeurs [38] ont explicité les définitions générales et théorème généraux sur la couche limite considérée du point de vue dynamique, les définitions et théorème sur la couche limite considérée du point de vue thermique et les équations de la couche limite laminaire dans le cas d'un écoulement plan ou de révolution, qui aide à développer la connaissance sur notre travail.

Par ailleurs, Driss Ouldhadda a proposé également deux programmes informatiques qui permettent de déterminer, la vitesse à la frontière extérieure de la couche limite autour des corps à symétrie de révolution d'une part, et les distributions des vitesses et des températures ainsi que les valeurs locales des coefficients de frottement et de nombre de Nusselt dans la couche limite à l'aide de développements de Gortier d'autre part.

Parmi les travaux recensés, Nadeem et *al.* [52], utilisaient la méthode de l'analyse de l'homotopie optimale sur l'instabilité de la couche limite d'un écoulement autour d'un cône en rotation et les transferts massique et thermique. Les caractéristiques physiques de paramètres convenables ont été discutées en fonction des profils de vitesses, concentration, coefficients de

frottement, nombres de Nusselt et de Sherwood. À l'égard de cette hypothèse, Sulochana et *al.* [53] ont apporté une autre perspective hypothétique et méthodologique, en analysant les transferts thermiques et de masse d'un écoulement magnétohydrodynamique autour d'un cône poreux vertical en rotation. Les équations sont résolues par la méthode de Runge Kutta et les résultats montrent que l'augmentation du paramètre de porosité développe la chaleur et le taux du transfert de masse.

Chapitre 1

DESCRIPTION ET FORMULATION MATHEMATIQUE DU PROBLEME

1.1 Modèle physique et hypothèses simplificatrices

1.1.1 Description du problème

Nous avons comme modèle physique un cône de révolution incliné, tournant autour de son axe de révolution et plongé dans un écoulement forcé d'un fluide newtonien de direction verticale ascendante (Figure I). La paroi du corps est supposée à une température constante T_p , différente de la température T_∞ du fluide loin de la paroi qui est également constante.

Nous nous proposons d'étudier les transferts simultanés d'impulsion et de chaleur entre la paroi et le fluide.

Nous associons à ce modèle un système de coordonnées curvilignes s, y, φ pour repérer un point P du fluide. On désigne par M le projeté orthogonal de P sur la paroi du cône.

s est l'abscisse curviligne du point M mesurée à partir du sommet O du cône.

y est la distance normale de la paroi à la particule fluide considérée ; comptée positivement à partir du point M vers le sein du fluide : $y=MP$.

φ est la coordonnée azimutale mesurée dans le sens trigonométrique autour de l'axe de révolution (oo') du cône à partir du plan vertical $[\pi]$ qui n'est autre que le plan de la figure.

1.1.2. Hypothèses simplificatrices

Outre ces considérations et ces hypothèses classiques de la couche limite, nous posons les hypothèses complémentaires suivantes :

- les transferts sont tridimensionnels, laminaires et permanents,
- les transferts par rayonnement et la dissipation d'énergie visqueuse sont négligeables,
- le fluide est de l'air dont les propriétés physiques sont supposées constantes,
- le fluide est incompressible.

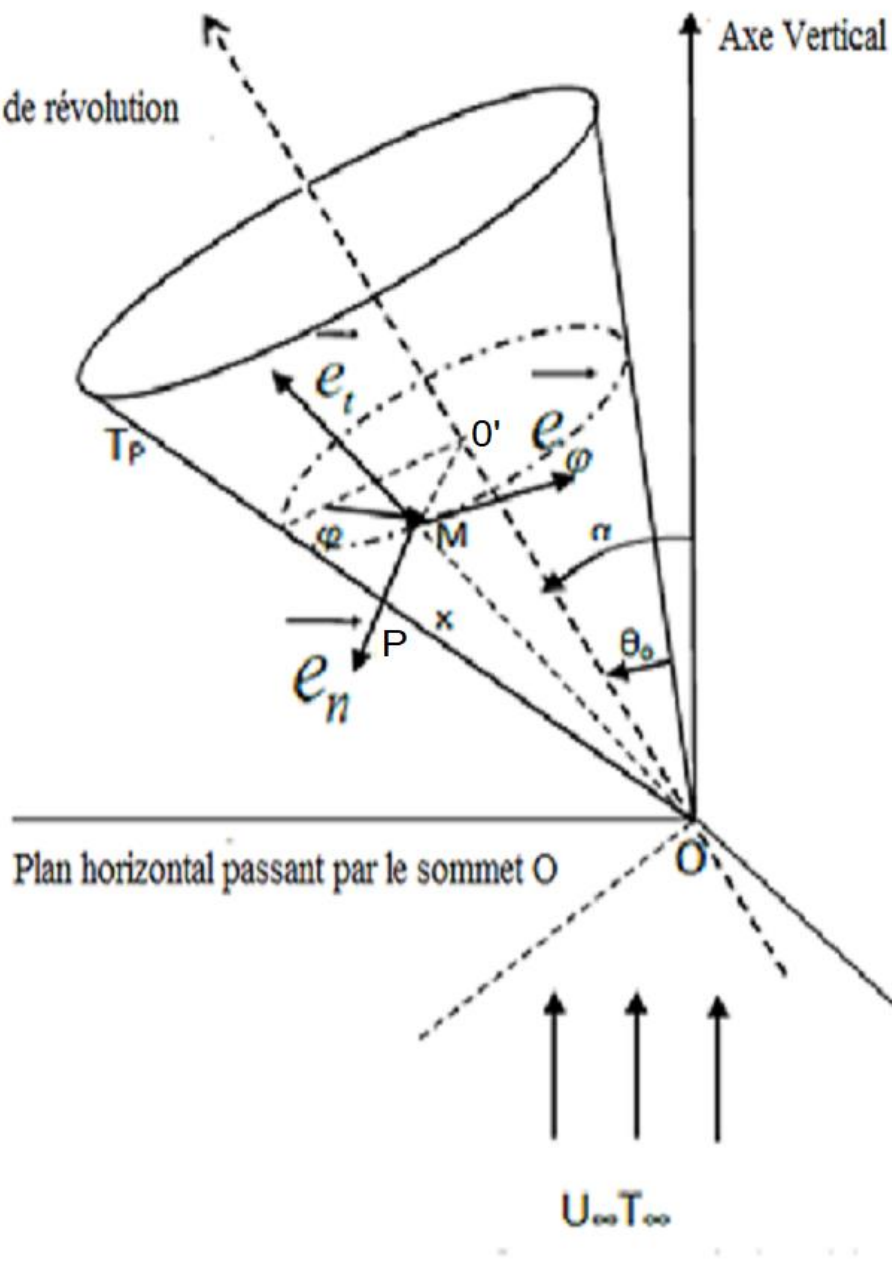


Figure 1.1 : Représentation schématique du modèle physique

1.2 Modèle mathématique

1.2.1 Equations de transfert dans la couche limite

Pour la commodité de calcul, nous désignons par x l'abscisse curviligne s et par r la distance du point M à l'axe de révolution du cône.

Ainsi, en tenant compte des hypothèses formulées ci-dessus, les équations régissant les transferts d'impulsion et de chaleur, en convection forcée laminaire, s'écrivent (voir annexe A1) :

1.2.1.1 Equation de continuité

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{V_x}{r} \frac{dr}{dx} = 0 \quad (1.1)$$

V_x , V_y et V_φ étant respectivement les composantes de vecteur vitesse suivant x, y et φ .

Voir Annexe (A1.3.18.4).

1.2.1.2 Equations de la quantité de mouvement

a) suisant x

$$V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{V_\varphi}{r} \frac{\partial V_x}{\partial \varphi} - \frac{V_\varphi^2}{r} \frac{dr}{dx} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} \quad (1.2)$$

b) suisant φ

$$V_x \frac{\partial V_\varphi}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_\varphi}{\partial y} + \frac{V_\varphi}{r} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{V_x V_\varphi}{r} \frac{dr}{dx} = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial P}{\partial \varphi} + \nu \frac{\partial^2 V_\varphi}{\partial y^2} \quad (1.3)$$

Où P est la pression dans le fluide ; ρ et ν sont respectivement la masse volumique et la viscosité cinématique du fluide.

Equation de Navier-Stokes projetée dans la base du repère curviligne.

La pression P dans la couche limite est liée au module de la vitesse extérieure U_e par l'équation de BERNOULLI :

$$P + \frac{1}{2} \rho U_e^2 = \text{constante} \quad (1.4)$$

Avec :

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = U_e \frac{\partial U_e}{\partial x} \quad (1.5)$$

$$-\frac{1}{\rho r} \frac{\partial P}{\partial \varphi} = \frac{U_e}{r} \frac{\partial U_e}{\partial \varphi} \quad (1.6)$$

Ainsi, les équations de la quantité de mouvement s'écrivent :

$$V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{V_\varphi}{r} \frac{\partial V_x}{\partial \varphi} - \frac{V_\varphi^2}{r} \frac{dr}{dx} = U_e \frac{\partial U_e}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} \quad (1.7)$$

$$V_x \frac{\partial V_\varphi}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_\varphi}{\partial y} + \frac{V_\varphi}{r} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{V_\varphi V_x}{r} \frac{dr}{dx} = \frac{U_e}{r} \frac{\partial U_e}{\partial \varphi} + \nu \frac{\partial^2 V_\varphi}{\partial y^2} \quad (1.8)$$

Module de la vitesse extérieure [8] :

$$Ue = \sqrt{Ue_x^2 + Ue_\varphi^2}$$

Avec :

$$Ue_x = U_\infty (A_\varphi \sin \alpha \sin \varphi) \quad (1.9)$$

$$Ue_\varphi = U_\infty (A_x \cos \alpha + B_x \sin \alpha \cos \varphi) \quad (1.10)$$

$$A_x(x) = 0,68 + 3,0329x - 25,44074x^2 + 121,069x^3 + 318,64541x^4 + 466,99471x^5 - 356,01959x^6 + 110,24752x^7$$

$$B_x(x) = -0,80834 + 2,69424x - 21,37757x^2 + 98,83137x^3 - 252,98221x^4 + 363,05621x^5 - 272,50282x^6 + 83,5337x^7$$

$$A_\varphi = 2,3181 - 2,29665x + 5,87104x^2 - 10,90766x^3 + 10,3346x^4 - 4,06092x^5$$

1.2.1.3 Equation de la chaleur

$$V_x \frac{\partial T}{\partial x} + V_y \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{V_\varphi}{r} \frac{\partial T}{\partial \varphi} = a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (1.11)$$

Où $a = \frac{\lambda}{\rho C_p}$ est la diffusivité thermique du fluide, λ et C_p étant respectivement la conductivité thermique et la capacité calorifique massique à pression constante du fluide.

1.2.1.4 Conditions aux limites

A la paroi $y = 0$

$$T(x, 0, \varphi) = \text{constante} \quad (1.12)$$

$$V_x(x, 0, \varphi) = 0 \quad (1.13)$$

$$V_y(x, 0, \varphi) = 0 \quad (1.14)$$

$$V_\varphi(x, 0, \varphi) = r\omega \quad (1.15)$$

ω : vitesse angulaire de rotation du cône

r : rayon du cône

Loin de la paroi : $y \rightarrow \infty$

$$T(x, y, \varphi) \rightarrow T_\infty \quad (1.16)$$

$$V_x(x, y, \varphi) \rightarrow Ue_x \quad (1.17)$$

$$V_\varphi(x, y, \varphi) \rightarrow Ue_\varphi \quad (1.18)$$

où Ue_x et Ue_φ [7] sont les composantes de vecteur vitesse de l'écoulement potentiel respectivement suivant les directions x et φ .

1.2.2 Nombre de Nusselt et coefficients de frottements

1.2.2.1. Nombre de Nusselt

Pour caractériser le transfert de chaleur, nous définissons le nombre de Nusselt par :

$$Nu = \frac{hL}{\lambda} \quad (1.19)$$

Où h , L et λ sont respectivement le coefficient de transfert par convection, la longueur caractéristique et la conductivité thermique du fluide.

En supposant que la densité du flux de chaleur évacuée de la paroi vers le fluide par convection se réduise seulement à la densité du flux de chaleur qui traverse la couche limite par conduction, nous écrivons :

$$h(T_p - T_\infty) = \left[-\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right]_{y=0} \quad (1.20)$$

T_p : la température à la surface du cône

Les relations (1.2.1.14) et (1.2.1.15) nous permet d'écrire :

$$h = \frac{-\lambda}{T_p - T_\infty} \left[\frac{\partial T}{\partial y} \right]_{y=0} \quad \text{et} \quad Nu = \frac{L}{\lambda} \frac{-\lambda}{T_p - T_\infty} \left[\frac{\partial T}{\partial y} \right]_{y=0} \quad (1.21)$$

Par conséquent, le nombre de Nusselt s'écrit :

$$Nu = - \frac{L}{T_p - T_\infty} \left[\frac{\partial T}{\partial y} \right]_{y=0} \quad (1.22)$$

1.2.2.2 Coefficients de frottements

Les coefficients de frottements pariétaux suivants x et φ sont définis par :

$$Cf_u = \frac{\tau_{px}}{\frac{1}{2} \rho U_\infty^2} \quad (1.23)$$

$$Cf_w = \frac{\tau_{p\varphi}}{\frac{1}{2} \rho U_\infty^2}$$

Où τ_{px} et $\tau_{p\varphi}$ sont les contraintes de frottements pariétales données par :

$$\tau_{px} = \left[\mu \frac{\partial V_x}{\partial y} \right]_{y=0} \quad (1.24)$$

$$\tau_{p\varphi} = \left[\mu \frac{\partial V_\varphi}{\partial y} \right]_{y=0}$$

U_∞ représente la vitesse du fluide loin de la paroi et μ la viscosité dynamique du fluide.

Chapitre 2

ADIMENSIONNALISATION DES EQUATIONS

2.1 Cas où la convection forcée est prédominante

2.1.1 Variables adimensionnelles

En prenant pour grandeur de référence la longueur L de la génératrice du cône, la vitesse U_∞ du fluide à l'infini dirigée verticalement vers le haut et la température T_∞ du fluide loin de la paroi, les équations de transfert ainsi que les conditions aux limites sont adimensionnalisées à l'aide des variables adimensionnelles suivantes :

$$\begin{aligned}x_+ &= \frac{x}{L}, \quad y_+ = \frac{y}{L} \sqrt{\text{Re}_\infty}, \quad \varphi_+ = \varphi, \quad r_+ = \frac{r}{L}, \\V_x^+ &= \frac{V_x}{U_\infty}, \quad V_y^+ = \frac{V_y}{U_\infty} \sqrt{\text{Re}_\infty}, \quad V_\varphi^+ = \frac{V_\varphi}{U_\infty} \\Ue^+ &= \frac{Ue}{U_\infty}, \quad Ue_x^+ = \frac{Ue_x}{U_\infty}, \quad Ue_\varphi^+ = \frac{Ue_\varphi}{U_\infty} \\T^+ &= \frac{(T - T_\infty)}{\frac{1}{2} \frac{U_\infty^2}{Cp}}\end{aligned}\tag{2.1}$$

Nombre de Reynolds de l'écoulement axiale, relatif à U_∞ :

$$\text{Re}_\infty = \frac{U_\infty L}{\nu}$$

2.1.2 Equations adimensionnelles

2.1.2.1 Equation de continuité

$$\frac{\partial V_x^+}{\partial x_+} + \frac{\partial V_y^+}{\partial y_+} + \frac{V_x^+}{r^+} \frac{dr^+}{dx_+} + \frac{1}{r^+} \frac{\partial V_\varphi^+}{\partial \varphi_+} = 0\tag{2.2}$$

2.1.2.2 Equations de la quantité de mouvement

$$V_x^+ \frac{\partial V_x^+}{\partial x_+} + V_y^+ \frac{\partial V_x^+}{\partial y_+} + \frac{V_\varphi^+}{r^+} \frac{\partial V_x^+}{\partial \varphi_+} - \frac{V_\varphi^{+2}}{r^+} \frac{dr^+}{dx_+} = Ue^+ \frac{\partial Ue^+}{\partial x_+} + \frac{\partial^2 V_x^+}{\partial y_+^2}\tag{2.3}$$

$$V_x^+ \frac{\partial V_\varphi^+}{\partial x_+} + V_y^+ \frac{\partial V_\varphi^+}{\partial y_+} + \frac{V_\varphi^+}{r^+} \frac{\partial V_\varphi^+}{\partial \varphi_+} + \frac{V_x^+ V_\varphi^+}{r^+} \frac{dr^+}{dx_+} = \frac{Ue^+}{r^+} \frac{\partial Ue^+}{\partial \varphi_+} + \frac{\partial^2 V_\varphi^+}{\partial y_+^2}\tag{2.4}$$

2.1.2.3 Equation de la chaleur

$$V_x^+ \frac{\partial T^+}{\partial x_+} + V_y^+ \frac{\partial T^+}{\partial y_+} + \frac{V_\varphi^+}{r^+} \frac{\partial T^+}{\partial \varphi_+} = \frac{1}{\text{Pr}} \frac{\partial^2 T^+}{\partial y_+^2} \quad (2.5)$$

Pr : Le nombre adimensionnelle de Prandtl défini par :

$$\text{Pr} = \frac{\mu C_p}{\lambda} = \frac{\nu}{a}$$

2.1.2.4 Conditions aux limites

A la paroi: $y_+ = 0$

$$T^+ = +1 \quad (2.6)$$

$$V_x^+(x_+, 0, \varphi_+) = 0 \quad (2.7)$$

$$V_y^+(x_+, 0, \varphi_+) = 0 \quad (2.8)$$

$$V_\varphi^+(x_+, 0, \varphi_+) = 0 \quad (2.9)$$

Loin de la paroi : $y_+ \rightarrow \infty$

$$T^+(x_+, y_+, \varphi_+) \rightarrow 0 \quad (2.10)$$

$$V_x^+(x_+, y_+, \varphi_+) \rightarrow U e_x^+ \quad (2.11)$$

$$V_\varphi^+(x_+, y_+, \varphi_+) \rightarrow U e_\varphi^+ \quad (2.12)$$

2.1.3 Expression du nombre de Nusselt et des coefficients de frottement

2.1.3.1 Nombre de Nusselt

$$\left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} = \frac{1}{2} \frac{U \infty^2}{C_p} \frac{\text{Re} \infty^{\frac{1}{2}}}{L} \left(\frac{\partial T^+}{\partial y_+} \right)_{y_+=0}$$

Donc

$$Nu = - \frac{L}{T_s - T_f} \frac{1}{2} \frac{U \infty^2}{C_p} \frac{\text{Re} \infty^{\frac{1}{2}}}{L} \left(\frac{\partial T^+}{\partial y_+} \right)_{y_+=0}$$

Or le nombre d'Eckert Ec est donné par la relation :

$$Ec = \frac{U \infty^2}{C_p \Delta T}$$

$\text{Re} \infty$: Nombre adimensionnel de Reynolds de l'écoulement axial, relatif à U_∞ défini par :

$$\text{Re} \infty = \frac{U \infty L}{\nu}$$

Alors

$$Nu = -\frac{1}{2} Ec Re \infty^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial T^+}{\partial y_+} \right)_{y_+=0}$$

$$2Ec^{-1} Re \infty^{-\frac{1}{2}} Nu = - \left(\frac{\partial T^+}{\partial y_+} \right)_{y_+=0} \quad (2.13)$$

2.1.3.2 Coefficients de frottement

$$Cfu = \frac{2\mu Re \infty^{\frac{1}{2}}}{U \infty L \rho} \left(\frac{\partial V_x^+}{\partial y_+} \right)_{y_+=0}$$

$$Re \infty^{\frac{1}{2}} Cfu = 2 \left(\frac{\partial V_x^+}{\partial y_+} \right)_{y_+=0} \quad (2.14)$$

$$Re \infty^{\frac{1}{2}} Cfw = 2 \left(\frac{\partial V_\varphi^+}{\partial y_+} \right)_{y_+=0} \quad (2.15)$$

2.2 Cas où la convection rotatoire est prédominante

2.2.1 Variables adimensionnelles

En prenant pour grandeur de référence la longueur L de la génératrice du cône, la vitesse U_∞ du fluide à l'infini dirigée verticalement vers le haut et la température T_∞ du fluide loin de la paroi, les équations de transfert ainsi que les conditions aux limites sont adimensionnalisées à l'aide des variables adimensionnelles suivantes :

$$x_+ = \frac{x}{L}, \quad y_+ = \frac{y}{L} \sqrt{Re \omega}, \quad \varphi_+ = \varphi$$

$$r_+ = \frac{r}{L}, \quad V_x^+ = \frac{V_x}{L\omega}, \quad V_y^+ = \frac{V_y}{L\omega} \sqrt{Re \omega}$$

$$V_\varphi^+ = \frac{V_\varphi}{L\omega}, \quad Ue^+ = \frac{Ue}{L\omega}, \quad Ue_x^+ = \frac{Ue_x}{L\omega}$$

$$Ue_\varphi^+ = \frac{Ue_\varphi}{L\omega}, \quad T^+ = \frac{(T - T_\infty)}{\frac{1}{2} \frac{(L\omega)^2}{Cp}} \quad (2.16)$$

Avec :

$Re \omega$: Nombre adimensionnel de Reynolds de rotation, relatif à ω défini par la relation :

$$Re \omega = \frac{\omega L^2}{\nu}$$

B : Paramètre de rotation donné par la relation :

$$B = \frac{\text{Re } \omega}{\text{Re } \infty}$$

2.2.2 Equations adimensionnelles

2.2.2.1 Equation de continuité

$$\frac{\partial V_x^+}{\partial x_+} + \frac{\partial V_y^+}{\partial y_+} + \frac{V_x^+}{r^+} \frac{dr^+}{dx_+} + \frac{1}{r^+} \frac{\partial V_\phi^+}{\partial \phi_+} = 0 \quad (2.17)$$

2.2.2.2 Equations de la quantité de mouvement

$$V_x^+ \frac{\partial V_x^+}{\partial x_+} + V_y^+ \frac{\partial V_x^+}{\partial y_+} + \frac{V_\phi^+}{r^+} \frac{\partial V_x^+}{\partial \phi_+} - \frac{V_\phi^{+2}}{r^+} \frac{dr^+}{dx_+} = Ue^+ \frac{\partial Ue^+}{\partial x_+} + \frac{\partial^2 V_x^+}{\partial y_+^2} \quad (2.18)$$

$$V_x^+ \frac{\partial V_\phi^+}{\partial x_+} + V_y^+ \frac{\partial V_\phi^+}{\partial y_+} + \frac{V_\phi^+}{r^+} \frac{\partial V_\phi^+}{\partial \phi_+} + \frac{V_x^+ V_\phi^+}{r^+} \frac{dr^+}{dx_+} = \frac{Ue^+}{r^+} \frac{\partial Ue^+}{\partial \phi_+} + \frac{\partial^2 V_\phi^+}{\partial y_+^2} \quad (2.19)$$

2.2.2.3 Equation de la chaleur

$$V_x^+ \frac{\partial T^+}{\partial x_+} + V_y^+ \frac{\partial T^+}{\partial y_+} + \frac{V_\phi^+}{r^+} \frac{\partial T^+}{\partial \phi_+} = \frac{1}{\text{Pr}} \frac{\partial^2 T^+}{\partial y_+^2} \quad (2.20)$$

2.2.2.4 Conditions aux limites

A la paroi: $y_+ = 0$

$$T^+ = +1 \quad (2.21)$$

$$V_x^+(x_+, 0, \phi_+) = 0 \quad (2.22)$$

$$V_y^+(x_+, 0, \phi_+) = 0 \quad (2.23)$$

$$V_\phi^+(x_+, 0, \phi_+) = r^+ \quad (2.24)$$

Loin de la paroi : $y_+ \rightarrow \infty$

$$T^+(x_+, y_+, \phi_+) \rightarrow 0 \quad (2.25)$$

$$V_x^+(x_+, y_+, \phi_+) \rightarrow Ue_x^+ \quad (2.26)$$

$$V_\phi^+(x_+, y_+, \phi_+) \rightarrow Ue_\phi^+ \quad (2.27)$$

2.2.3 Expression du nombre de Nusselt et des coefficients de frottement

Nombre de Nusselt

$$Nu = -\frac{1}{2} Ec \text{Re } \omega^2 \left(\frac{\partial T^+}{\partial y_+} \right)_{y_+=0}$$

$$2Ec^{-1} Re \omega^{-\frac{1}{2}} Nu = - \left(\frac{\partial T^+}{\partial y_+} \right)_{y_+=0} \quad (2.28)$$

Coefficients de frottements

$$B Re \infty Re \omega^{\frac{1}{2}} Cfu = 2 \left(\frac{\partial V_x^+}{\partial y_+} \right)_{y_+=0}$$

$$\frac{1}{2} Re \infty^{\frac{1}{2}} Cfu = \left(\frac{\partial V_x^+}{\partial y_+} \right)_{y_+=0} \quad (2.29)$$

$$B Re \infty Re \omega^{\frac{1}{2}} Cfw = 2 \left(\frac{\partial V_\varphi^+}{\partial y_+} \right)_{y_+=0}$$

$$\frac{1}{2} Re \infty^{\frac{1}{2}} Cfw = \left(\frac{\partial V_\varphi^+}{\partial y_+} \right)_{y_+=0} \quad (2.30)$$

2.3 Généralisation

Dans le but d'unifier l'écriture des équations bilan de transfert dans la couche limite, des conditions aux limites à la paroi et à l'infini ainsi que des nombres de NUSSELT et des coefficients de frottements ; il est convenable de se servir des coefficients C_i , $i \in]1,5[$ Raminosoa [15].

Par ailleurs, afin de mettre en évidence les contributions individuels ou simultanée d'une prédominance, il est possible d'associer respectivement à chacune de ces convections les points C_{for} et C_{rot} , chacun d'eux prennent la valeur 1 ou 0 selon que le type de convection qui lui correspond prévaut ou non.

Re_∞ représente toujours le Nombre de Reynolds de l'écoulement axial, relatif à U_∞ défini par :

$$Re_\infty = \frac{U_\infty L}{\nu}$$

Re_ω aussi représente toujours le Nombre de Reynolds de rotation, relatif à ω donné par la relation :

$$Re_\omega = \frac{\omega L^2}{\nu}$$

De même pour paramètre de rotation B , toujours celui qui est représenté par :

$$B = \frac{Re_\omega}{Re_\infty}$$

Tableau 2.1: Les variables adimensionnels de contribution individuelle ou simultanée d'une prédominance.

Grandeurs	Convection forcée prédominante	Convection rotatoire prédominante	Convections mixte
x_+	$\frac{x}{L}$	$\frac{x}{L}$	$\frac{x}{L}$
y_+	$\frac{y}{L} \sqrt{\text{Re}_\infty}$	$\frac{y}{L} \sqrt{\text{Re}_\omega}$	$\frac{y}{L} \frac{\sqrt{\text{Re}_\infty} C_{for} + \sqrt{\text{Re}_\omega} C_{rot}}{C_{for} + C_{rot}}$
φ_+	φ	φ	φ
r^+	$\frac{r}{L}$	$\frac{r}{L}$	$\frac{r}{L}$
V_x^+	$\frac{V_x}{U_\infty}$	$\frac{V_x}{L\omega}$	$V_x \frac{\frac{C_{for}}{U_\infty} + \frac{C_{rot}}{L\omega}}{C_{for} + C_{rot}}$
V_y^+	$\frac{V_y}{U_\infty} \sqrt{\text{Re}_\infty}$	$\frac{V_y}{L\omega} \sqrt{\text{Re}_\omega}$	$V_y \frac{\frac{C_{for}}{U_\infty} \sqrt{\text{Re}_\infty} + \frac{C_{rot}}{L\omega} \sqrt{\text{Re}_\omega}}{C_{for} + C_{rot}}$
V_φ^+	$\frac{V_\varphi}{U_\infty}$	$\frac{V_\varphi}{L\omega}$	$V_\varphi \frac{\frac{C_{for}}{U_\infty} + \frac{C_{rot}}{L\omega}}{C_{for} + C_{rot}}$
Ue^+	$\frac{Ue}{U_\infty}$	$\frac{Ue}{L\omega} \sqrt{\text{Re}_\infty}$	$Ue \frac{\frac{C_{for}}{U_\infty} + \frac{C_{rot}}{L\omega} \sqrt{\text{Re}_\infty}}{C_{for} + C_{rot}}$
T^+	$\frac{T - T_\infty}{\frac{1}{2} \frac{U_\infty^2}{Cp}}$	$\frac{T - T_\infty}{\frac{1}{2} \frac{(L\omega)^2}{Cp}}$	$\frac{T - T_\infty}{\frac{1}{2} \frac{U_\infty^2}{Cp}} \frac{C_{for} + B^{-2} C_{rot}}{C_{for} + C_{rot}}$

Avec :

$$\frac{T - T_\infty}{\frac{1}{2} \frac{U_\infty^2}{Cp}} = \frac{T - T_\infty}{Ec \Delta T}$$

Tableau 2.2: Valeurs des grandeurs C_i , $1 \leq i \leq 5$ selon les types de convection mixte.

Coefficient de convection	Convection combinée
C_1	$\frac{C_{for} + B^{\frac{1}{2}} C_{rot}}{C_{for} + C_{rot}}$
C_2	$\frac{C_{for} + B^{-1} C_{rot}}{C_{for} + C_{rot}}$
C_3	$\frac{C_{for} + B^{-\frac{1}{2}} C_{rot}}{C_{for} + C_{rot}}$
C_4	$\frac{C_{for} + B^{-1} \text{Re} \omega^{\frac{1}{2}} C_{rot}}{C_{for} + C_{rot}}$
C_5	$\frac{1}{Ec} \frac{C_{for} + B^{-2} C_{rot}}{C_{for} + C_{rot}}$

$$\begin{aligned}
 x_+ &= \frac{x}{L}, \quad y_+ = \frac{y}{L} \sqrt{\text{Re} \infty} C_1, \quad \varphi_+ = \varphi \\
 r_+ &= \frac{r}{L}, \quad V_x^+ = \frac{V_x}{U_\infty} C_2, \quad V_y^+ = \frac{V_y}{U_\infty} \sqrt{\text{Re} \infty} C_3 \\
 V_\varphi^+ &= \frac{V_\varphi}{U_\infty} C_2, \quad Ue^+ = \frac{Ue}{U_\infty} C_4, \quad Ue_x^+ = \frac{Ue_x}{U_\infty} \\
 Ue_\varphi^+ &= \frac{Ue_\varphi}{U_\infty}, \quad T^+ = \frac{T - T_\infty}{\Delta T} C_5
 \end{aligned} \tag{2.31}$$

2.3.1 Equations de transferts généralisés adimensionnelles

2.3.1.1 Equation de continuité

$$\frac{\partial V_x^+}{\partial x_+} + \frac{C_1 C_2}{C_3} \frac{\partial V_y^+}{\partial y_+} + \frac{V_x^+}{r^+} \frac{dr^+}{dx_+} + \frac{1}{r^+} \frac{\partial V_\varphi^+}{\partial \varphi_+} = 0 \tag{2.32}$$

2.3.1.2 Equations de la quantité de mouvement

$$V_x^+ \frac{\partial V_x^+}{\partial x_+} + \frac{C_1 C_2}{C_3} V_y^+ \frac{\partial V_x^+}{\partial y_+} + \frac{V_\varphi^+}{r^+} \frac{\partial V_x^+}{\partial \varphi_+} - \frac{V_\varphi^{+2}}{r^+} \frac{dr^+}{dx_+} = \frac{C_2^2}{C_4^2} Ue^+ \frac{\partial Ue^+}{\partial x_+} + C_1^2 C_2 \frac{\partial^2 V_x^+}{\partial y_+^2} \quad (2.33)$$

$$V_x^+ \frac{\partial V_\varphi^+}{\partial x_+} + \frac{C_1 C_2}{C_3} V_y^+ \frac{\partial V_\varphi^+}{\partial y_+} + \frac{V_\varphi^+}{r^+} \frac{\partial V_\varphi^+}{\partial \varphi_+} + \frac{V_x^+ V_\varphi^+}{r^+} \frac{dr^+}{dx_+} = \frac{C_2^2}{C_4^2} \frac{Ue^+}{r^+} \frac{\partial Ue^+}{\partial \varphi_+} + C_1^2 C_2 \frac{\partial^2 V_\varphi^+}{\partial y_+^2} \quad (2.34)$$

2.3.1.3 Equation de la chaleur

$$V_x^+ \frac{\partial T^+}{\partial x_+} + \frac{C_1 C_2}{C_3} V_y^+ \frac{\partial T^+}{\partial y_+} + \frac{V_\varphi^+}{r^+} \frac{\partial T^+}{\partial \varphi_+} = C_1^2 C_2 \frac{1}{\text{Pr}} \frac{\partial^2 T^+}{\partial y_+^2} \quad (2.35)$$

2.3.1.4 Conditions aux limites

A la paroi: $y = 0$

$$T^+ = +1 \quad (2.36)$$

$$V_x^+(x_+, 0, \varphi_+) = 0 \quad (2.37)$$

$$V_y^+(x_+, 0, \varphi_+) = 0 \quad (2.38)$$

$$V_\varphi^+(x_+, 0, \varphi_+) = r^+ C_2 \quad (2.39)$$

Loin de la paroi : $y \rightarrow \infty$

$$T^+(x_+, y_+, \varphi_+) \rightarrow 0 \quad (2.40)$$

$$V_x^+(x_+, y_+, \varphi_+) \rightarrow \frac{C_2}{C_4} Ue_x^+ \quad (2.41)$$

$$V_\varphi^+(x_+, y_+, \varphi_+) \rightarrow \frac{C_2}{C_4} Ue_\varphi^+ \quad (2.42)$$

2.3.2 Expression du nombre de Nusselt et des coefficients de frottement généralisés

2.3.2.1 Nombre de Nusselt

Alors

$$Nu = -\frac{1}{2} \frac{C_1}{C_5} \text{Re} \infty^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial T^+}{\partial y_+} \right)_{y_+=0}$$

$$2C_5C_1^{-1}\text{Re}\infty^{-\frac{1}{2}}Nu = -\left(\frac{\partial T^+}{\partial y_+}\right)_{y_+=0} \quad (2.43)$$

2.3.2.2 Coefficients de frottement en convection mixte

$$C_1^{-1}C_2\text{Re}\infty^{\frac{1}{2}}Cfu = 2\left(\frac{\partial V_x^+}{\partial y_+}\right)_{y_+=0} \quad (2.44)$$

$$C_1^{-1}C_2\text{Re}\infty^{\frac{1}{2}}Cfw = 2\left(\frac{\partial V_\varphi^+}{\partial y_+}\right)_{y_+=0} \quad (2.45)$$

Chapitre 3

DISCRETISATION DES EQUATIONS DE TRANSFERTS

3.1 Méthode générale de la discrétisation

3.1.1 Première étape : choix de la méthode utilisée et maillage du domaine

Pour résoudre numériquement les équations de transferts dans la couche limite et les conditions aux limites qui leurs sont associées, plusieurs méthodes existent, comme Canissius [1] a cité. Mais nous allons discrétiser ces équations par la méthode aux différences finies. Cette méthode consiste à établir un maillage du domaine d'intégration.

L'écoulement à étudier étant tridimensionnel et stationnaire autour d'un cône tournant autour de son axe de révolution, on prend comme maille du réseau des empilements en nombre fini $L \times M \times N$ de parallélépipèdes élémentaires curvilignes [Figure 3-1] rattachés au corps et définis par les pas Δx_+ , Δy_+ , $\Delta \phi_+$; où Δx_+ est le pas adimensionnel de l'abscisse curviligne, Δy_+ le pas adimensionnel de la coordonnée normale et $\Delta \phi_+$ le pas adimensionnel de la coordonnée azimutale

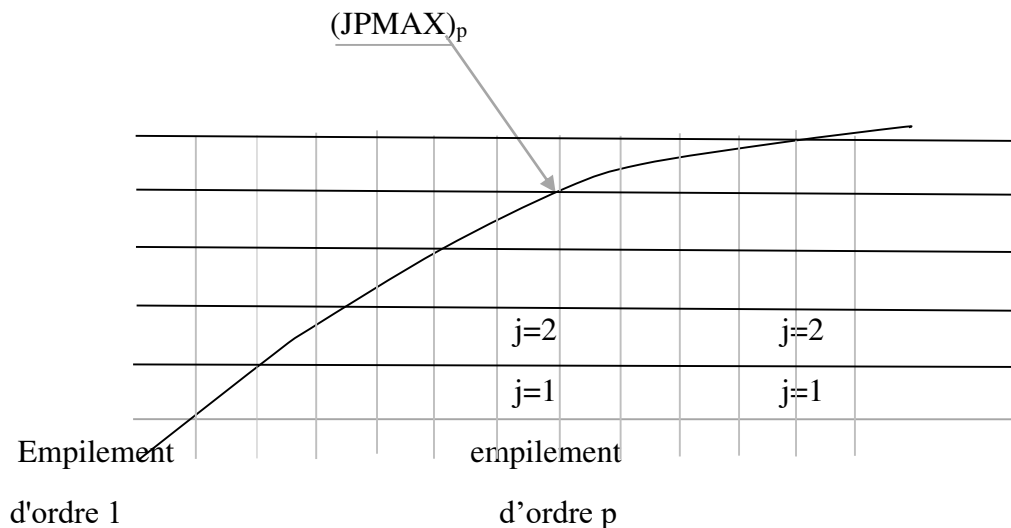


Figure 3.1 : Représentation schématique du maillage de la couche limite

L , M et N sont respectivement les indices maximaux de repérage suivant l'abscisse curviligne x , la coordonnée normale y et la coordonnée azimutale ϕ . L et N liés directement à la discrétisation géométrique du corps. Quant à M , il caractérise l'épaisseur de la couche limite

qui n'est pas connue à priori et qui change d'un empilement à un autre, M est donc donné par la relation :

$$M = \sum_{p=1}^{L.N} (JMAX)_p \quad (3.1)$$

P étant l'indice de l'empilement donné.

Les pas du réseau s'écrivent :

$$\Delta x_+ = x_{i+1} - x_i \quad 1 \leq i \leq L$$

$$\Delta y_+ = y_{j+1} - y_j \quad 1 \leq j \leq M$$

$$\Delta \varphi_+ = \varphi_{k+1} - \varphi_k \quad 1 \leq k \leq N$$

La valeur de la grandeur physique $G = G(x_+, y_+, \varphi_+)$ au point (i, j, k) est notée $G_{i,j}^k$

3.1.2 Deuxième étape : approximation des dérivées partielles

En outre la méthode aux différences finies consiste à remplacer toutes les dérivées partielles du premier et du second ordre par des quotients différentiels respectivement d'ordre 1 et

La fonction $G(x_+, y_+, \varphi_+)$ étant supposée suffisamment dérivable, sa valeur au point $G(x_+ + \Delta x_+, y_+ + \Delta y_+, \varphi_+ + \Delta \varphi_+)$, notée $G_{i+1,j+1}^{k+1}$, est obtenue par la formule de TAYLOR.

Ainsi, les dérivées partielles du premier et du second ordre de la fonction $G(x_+, y_+, \varphi_+)$ par rapport à la variable x_+ peuvent être exprimées de la manière suivante :

« Différence finie vers l'avant »

$$\left. \frac{\partial G}{\partial x_+} \right|_{i,j,k} = \frac{G_{i+1,j}^k - G_{i,j}^k}{\Delta x_+} \quad (3.2)$$

« Différence finie vers l'arrière »

$$\left. \frac{\partial G}{\partial x_+} \right|_{i,j,k} = \frac{G_{i,j}^k - G_{i-1,j}^k}{\Delta x_+} \quad (3.3)$$

« Différence finie centrée »

$$\left. \frac{\partial G}{\partial x_+} \right|_{i,j,k} = \frac{G_{i+1,j}^k - G_{i-1,j}^k}{2\Delta x_+} \quad (3.4)$$

$$\left. \frac{\partial^2 G}{\partial x_+^2} \right|_{i,j,k} = \frac{G_{i+1,j}^k - 2G_{i,j}^k + G_{i-1,j}^k}{\Delta x_+^2} \quad (3.5)$$

On montre également, en première approximation à 3 points, que l'on peut écrire :

$$\left. \frac{\partial G}{\partial x_+} \right|_{i,j,k} = \frac{3G_{i+1,j}^k - 4G_{i,j}^k + G_{i-1,j}^k}{2\Delta x_+} \quad (3.6)$$

3.2 Discrétisation des équations de la couche limite

Nous approchons les dérivées partielles suivant x_+ par une différence finie vers l'avant, suivant φ_+ par une différence finie centrée et suivant y_+ par une approximation à 3 points.

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial x_+} &= \frac{G_{i+1,j}^k - G_{i,j}^k}{\Delta x_+} \\ \frac{\partial G}{\partial \varphi_+} &= \frac{G_{i+1,j}^{k+1} - G_{i+1,j}^{k-1}}{2\Delta \varphi_+} \\ \frac{\partial G}{\partial y_+} &= \frac{3G_{i+1,j+1}^k - 4G_{i+1,j}^k + G_{i+1,j-1}^k}{2\Delta y_+} \\ \frac{\partial^2 G}{\partial y_+^2} &= \frac{G_{i+1,j+1}^k - 2G_{i+1,j}^k + G_{i+1,j-1}^k}{\Delta y_+^2} \end{aligned}$$

Nous procédons comme Alidina [27] et Raminosa [40] ont proposé en évaluant V_x^+ , V_y^+ , V_φ^+ respectivement aux nœuds $[V_x^+]_{i+1}^k$, $[V_y^+]_{i+1}^k$ et $[V_\varphi^+]_{i+1}^k$. Cette technique permet d'obtenir des résultats plus fiables en dépit de la durée des exécutions parfois très longue engendrée par les itérations qui s'imposent.

Il est à noter que la discrétisation des gradients de pression, exprimée sous les formes $Ue^+ \frac{\partial Ue^+}{\partial x_+}$

et $\frac{Ue^+}{r^+} \frac{\partial Ue^+}{\partial \varphi_+}$, doivent être réalisée d'une manière strictement identique à leur homologue du

premier membre afin d'éviter toute difficulté de raccordement de la couche limite à la frontière.

Pour alléger alors les notations, nous posons dans la suite :

$$\begin{aligned} U &= V_x^+, V = V_y^+, W = V_\varphi^+ \\ Ve &= Ue^+, T = T^+ \end{aligned} \quad (3.7)$$

La discrétisation des équations de la couche limite s'effectue de la manière suivante :

3.2.1 Equations de transferts généralisés discrétisées

3.2.1.1 Equation de continuité

$$\begin{aligned}
& \frac{U_{i+1,j}^k - U_{i,j}^k}{\Delta x_+} + \frac{C_1 C_2}{C_3} \frac{3V_{i+1,j+1}^k - 4V_{i+1,j}^k + V_{i+1,j-1}^k}{2\Delta y_+} + \\
& \frac{1}{r_{i+1}^+} \frac{W_{i+1,j}^{k+1} - W_{i+1,j}^{k-1}}{2\Delta\phi_+} + \frac{U_{i+1,j}^k}{\Delta x_+} \left(1 - \frac{r_i^+}{r_{i+1}^+} \right) = 0
\end{aligned} \tag{3.8}$$

3.2.1.2 Equation de la quantité de mouvement

a) Suivant x :

$$\begin{aligned}
& U_{i+1,j}^k \frac{U_{i+1,j}^k - U_{i,j}^k}{\Delta x_+} + \frac{C_1 C_2}{C_3} V_{i+1,j}^k \frac{3U_{i+1,j+1}^k - 4U_{i+1,j}^k + U_{i+1,j-1}^k}{2\Delta y_+} + \\
& \frac{W_{i+1,j}^k}{r_{i+1}^+} \frac{U_{i+1,j}^{k+1} - U_{i+1,j}^{k-1}}{2\Delta\phi_+} - \frac{(W_{i+1,j}^k)^2}{\Delta x_+} \left(1 - \frac{r_i^+}{r_{i+1}^+} \right) = \\
& \frac{C_2^2}{C_4^2} V_{i+1}^k \frac{Ve_{i+1}^k - Ve_i^k}{\Delta x_+} + C_2 C_1^2 \frac{U_{i+1,j+1}^k - 2U_{i+1,j}^k + U_{i+1,j-1}^k}{\Delta y_+^2}
\end{aligned} \tag{3.9}$$

b) Suivant ϕ :

$$\begin{aligned}
& U_{i+1,j}^k \frac{W_{i+1,j}^k - W_{i,j}^k}{\Delta x_+} + \frac{C_1 C_2}{C_3} V_{i+1,j}^k \frac{3W_{i+1,j+1}^k - 4W_{i+1,j}^k + W_{i+1,j-1}^k}{2\Delta y_+} + \\
& \frac{W_{i+1,j}^k}{r_{i+1}^+} \frac{W_{i+1,j}^{k+1} - W_{i+1,j}^{k-1}}{2\Delta\phi_+} + \frac{U_{i+1,j}^k W_{i+1,j}^k}{\Delta x_+} \left(1 - \frac{r_i^+}{r_{i+1}^+} \right) = \\
& \frac{C_2^2}{C_4^2} \frac{Ve_{i+1}^k}{r_{i+1}^2} \frac{Ve_{i+1}^{k+1} - Ve_{i+1}^{k-1}}{2\Delta\phi_+} + C_2 C_1^2 \frac{W_{i+1,j+1}^k - 2W_{i+1,j}^k + W_{i+1,j-1}^k}{\Delta y_+^2}
\end{aligned} \tag{3.2.1.4}$$

3.2.1.3 Equation de la chaleur

$$\begin{aligned}
& U_{i+1,j}^k \frac{T_{i+1,j}^k - T_{i,j}^k}{\Delta x_+} + \frac{C_1 C_2}{C_3} V_{i+1,j}^k \frac{3T_{i+1,j+1}^k - 4T_{i+1,j}^k + T_{i+1,j-1}^k}{2\Delta y_+} + \\
& \frac{W_{i+1,j}^k}{r_{i+1}^+} \frac{T_{i+1,j}^{k+1} - T_{i+1,j}^{k-1}}{2\Delta\phi_+} = C_2 C_1^2 \frac{1}{\text{Pr}} \frac{T_{i+1,j+1}^k - 2T_{i+1,j}^k + T_{i+1,j-1}^k}{\Delta y_+^2}
\end{aligned} \tag{3.10}$$

3.2.1.4 Condition aux limites

A la paroi : $j=1$, $1 < i < L$, $1 < k < N$

$$\frac{3T_{i+1,1}^k - 4T_{i+1,2}^k + T_{i+1,3}^k}{2\Delta y_+} = +1 \tag{3.11}$$

D'où

$$T_{i+1,1}^k = \frac{1}{3} (2\Delta y_+ + 4T_{i+1,2}^k - T_{i+1,3}^k)$$

$$U_{i+1,1}^k = 0 \quad (3.12)$$

$$V_{i+1,1}^k = 0 \quad (3.13)$$

$$W_{i+1,1}^k = C_2 r_{i+1}^+ \quad (3.14)$$

A la frontière de la couche limite : $j=JMAX$, $1 < i < L$, $1 < k < N$

$$T_{i+1,jMAX}^k = 0 \quad (3.15)$$

$$U_{i+1,jMAX}^k = \frac{C_2}{C_4} V_{e_{xi+1}}^k \quad (3.16)$$

$$W_{i+1,jMAX}^k = \frac{C_2}{C_4} V_{e_{\varphi_{i+1}}}^k \quad (3.17)$$

3.2.2 Nombre de Nusselt et des coefficients de frottement généralisés discrétisés

$$C_5 C_1^{-1} \text{Re} \infty^{-\frac{1}{2}} Nu = \frac{3T_{i+1,1}^k - 4T_{i+1,2}^k + T_{i+1,3}^k}{4\Delta y_+} \quad (3.18)$$

$$C_2 C_1^{-1} \text{Re} \infty^{\frac{1}{2}} Cfu = \frac{-3U_{i+1,1}^k + 4U_{i+1,2}^k - U_{i+1,3}^k}{\Delta y_+} \quad (3.19)$$

$$C_2 C_1^{-1} \text{Re} \infty^{\frac{1}{2}} Cfw = \frac{-3W_{i+1,1}^k + 4W_{i+1,2}^k - W_{i+1,3}^k}{\Delta y_+} \quad (3.20)$$

3.3 Méthode de résolution

3.3.1 Calcul de la température dans la couche limite, et des composantes méridienne et azimutale de la vitesse

Après réarrangement des termes, les équations (3.2.1.3), (3.2.1.4), (3.2.1.5) peuvent se mettre respectivement sous les formes suivantes :

$$At_j T_{i+1,j-1}^k + Bt_j T_{i+1,j}^k + Ct_j T_{i+1,j+1}^k = Dt_j \quad (3.21)$$

Avec :

$$At_j = \frac{C_1 C_2}{C_3} \frac{V_{i+1,j}^k}{2\Delta y_+} - C_2 C_1^2 \frac{1}{\text{Pr}} \frac{1}{\Delta y_+^2} \quad (3.22)$$

$$Bt_j = \frac{U_{i+1,j}^k}{\Delta x_+} - \frac{C_1 C_2}{C_3} \frac{2V_{i+1,j}^k}{\Delta y_+} + C_2 C_1^2 \frac{1}{\text{Pr}} \frac{2}{\Delta y_+^2} \quad (3.23)$$

$$Ct_j = \frac{C_1 C_2}{C_3} \frac{3V_{i+1,j}^k}{2\Delta y_+} - C_2 C_1^2 \frac{1}{\text{Pr}} \frac{1}{\Delta y_+^2} \quad (3.24)$$

$$Dt_j = U_{i+1,j}^k \frac{T_{i,j}^k}{\Delta x_+} - \frac{W_{i+1,j}^k}{r_{i+1}^+} \frac{T_{i+1,j}^{k+1} - T_{i+1,j}^{k-1}}{2\Delta\phi_+} \quad (3.25)$$

$$Au_j U_{i+1,j-1}^k + Bu_j U_{i+1,j}^k + Cu_j U_{i+1,j+1}^k = Du_j \quad (3.26)$$

Avec :

$$Au_j = \frac{C_1 C_2}{C_3} \frac{V_{i+1,j}^k}{2\Delta y_+} - C_2 C_1^2 \frac{1}{\Delta y_+^2} \quad (3.27)$$

$$Bu_j = \frac{U_{i+1,j}^k}{\Delta x_+} - \frac{C_1 C_2}{C_3} \frac{2V_{i+1,j}^k}{\Delta y_+} + C_2 C_1^2 \frac{2}{\Delta y_+^2} \quad (3.28)$$

$$Cu_j = \frac{C_1 C_2}{C_3} \frac{3V_{i+1,j}^k}{2\Delta y_+} - C_2 C_1^2 \frac{1}{\Delta y_+^2} \quad (3.29)$$

$$Du_j = U_{i+1,j}^k \frac{U_{i,j}^k}{\Delta x_+} - \frac{W_{i+1,j}^k}{r_{i+1}^+} \frac{U_{i+1,j}^{k+1} - U_{i+1,j}^{k-1}}{2\Delta\phi_+} + \frac{(W_{i+1,j}^k)^2}{\Delta x_+} \left(\frac{r_{i+1}^+ - r_i^+}{r_{i+1}^+} \right) + \frac{C_2^2}{C_4^2} V_{e_{i+1}}^k \frac{V_{e_{i+1}}^k - V_{e_i}^k}{\Delta x_+} \quad (3.30)$$

$$Aw_j W_{i+1,j-1}^k + Bw_j W_{i+1,j}^k + Cw_j W_{i+1,j+1}^k = Dw_j \quad (3.31)$$

Avec :

$$Aw_j = \frac{C_1 C_2}{C_3} \frac{V_{i+1,j}^k}{2\Delta y_+} - C_2 C_1^2 \frac{1}{\Delta y_+^2} \quad (3.32)$$

$$Bt_j = \frac{U_{i+1,j}^k}{\Delta x_+} - \frac{C_1 C_2}{C_3} \frac{2V_{i+1,j}^k}{\Delta y_+} + \frac{U_{i+1,j}^k}{\Delta x_+} \left(1 - \frac{r_i^+}{r_{i+1}^+} \right) + \frac{1}{r_{i+1}^+} \frac{W_{i+1,j}^{k+1} - W_{i+1,j}^{k-1}}{2\Delta\phi_+} + C_2 C_1^2 \frac{2}{\Delta y_+^2} \quad (3.33)$$

$$Cw_j = \frac{C_1 C_2}{C_3} \frac{3V_{i+1,j}^k}{2\Delta y_+} - C_2 C_1^2 \frac{1}{\Delta y_+^2} \quad (3.34)$$

$$Dw_j = U_{i+1,j}^k \frac{W_{i,j}^k}{\Delta x_+} + \frac{C_2^2}{C_4^2} \frac{V_{e_{i+1}}^k}{r_{i+1}^+} \frac{V_{e_{i+1}}^{k+1} - V_{e_{i+1}}^{k-1}}{2\Delta\phi_+} \quad (3.35)$$

3.3.2 Calcul de la composante normale de la vitesse

La composante normale de la vitesse est déduite de l'équation de continuité (3.8) :

$$V_{i+1,j+1}^k = \frac{4V_{i+1,j}^k}{3} - \frac{V_{i+1,j-1}^k}{3} + \frac{2}{3} \frac{C_1 C_2}{C_3} \Delta y_+ \left[\frac{U_{i+1,j}^k U_{i,j}^k}{\Delta x_+} + \frac{W_{i+1,j}^{k+1} - W_{i+1,j}^{k-1}}{2\Delta\phi_+} \frac{1}{r_{i+1}^+} + \frac{U_{i+1,j}^k}{\Delta x_+} \left(\frac{r_{i+1}^+ - r_i^+}{r_{i+1}^+} \right) \right] \quad (3.36)$$

Les valeurs de $V_{i+1,j+1}^k$ sont calculées de proche en proche par valeurs croissantes de j à partir de la paroi caractérisée par j=1.

3.3.3 Algorithme de résolution

Les systèmes d'équations algébriques (3.9) – (3.11) peuvent être résolus, entre autres méthode, soit par la méthode de GAUSS, soit par la méthode de la factorisation. La première a le mérite d'effectuer une résolution globale, mais cette procédure exige un certain nombre d'inversions matricielles qui ralentissent l'exécution des calculs.

Chacun de ces systèmes d'équations associées aux conditions aux limites et données par les équations, pris individuellement, peuvent s'écrire sous la forme :

$$A_j G_{j+1} + B_j G_j + C_j G_{j-1} = D_j \quad (3.37)$$

Pour $2 \leq j \leq J_{\max}$

L'équation peut être se mettre également sous forme matricielle :

$$[A][G] = [B] \quad (3.38)$$

Les coefficients de la matrice $[A]$ ainsi obtenue étant tri-diagonale, les systèmes d'équations données par la relation sont résolus par la méthode de factorisation, appelée souvent « algorithme de THOMAS ».

Les solutions de tels systèmes d'équations peuvent donc écrites sous la forme récurrente suivante :

$$G_j = \alpha_j G_{j+1} + \beta_j \quad (3.39)$$

Pour $2 \leq j \leq J_{\max}-1$

Tels que :

$$\begin{cases} \alpha_j = -\frac{C_j}{B_j - A_j \alpha_{j-1}} \\ \beta_j = \frac{D_j - A_j \beta_{j-1}}{B_j - A_j \alpha_{j-1}} \end{cases} \quad (3.40)$$

Pour $3 \leq j \leq J_{\max}$, et

$$\alpha_2 = -\frac{C_2}{B_2},$$

$$\beta_2 = \frac{D_2 - A_2 G_1}{B_2}$$

Pour $2 \leq j \leq J_{\max}-1$

L'algorithme simplifié de THOMAS, permettant de résoudre les équations de transfert données par les équations (3.9) - (3.11), se mesure de la manière suivante :

1 Calcul des coefficients α_j et β_j par une récurrence ascendante selon les équations (3.40).

2 Calcul des solutions par récurrence régressive selon l'équation (3.39) à partir de la condition à la frontière de la couche limite correspondant à $j = JMAX$.

Pour explorer point par point la couche limite développée autour du corps du cône (Figure 3.1), les trois conditions dimensionnelles formulées par les relations ci-dessous doivent être simultanément vérifiées.

$$\left| \frac{T_{jMAX} - T_{\infty}}{T_{\infty}} \right| \leq \varepsilon_T \quad (3.41)$$

$$\left| \frac{U_{jMAX} - U_{e_x}}{U_{e_x}} \right| \leq \varepsilon_U \quad (3.42)$$

$$\left| \frac{W_{jMAX} - U_{e_{\varphi}}}{U_{e_{\varphi}}} \right| \leq \varepsilon_W \quad (3.43)$$

Où ε_T , ε_U et ε_W sont les précisions souhaitées.

Si l'une au moins de ces conditions n'est pas vérifiée, le nombre des points dans la couche limite est incrémenté d'une unité et le calcul est repris jusqu'à ce que les trois conditions soient satisfaites. De la sorte, $(JMAX)_p$ est défini par l'empilement d'indice p donné.

3.3.4 Calcul du nombre de Nusselt et des coefficients de frottement

Le nombre de Nusselt Nu et les coefficients de frottements pariétaux, C_{fu} et C_{fw} respectivement suivant x et φ , sont définis par les dérivées respectives à la paroi selon les équations (3.3.2.10), (3.3.2.11) et (3.3.2.12) qui sont écrites sous la forme discrétisée :

$$\left. \frac{\partial G}{\partial y_+} \right|_{y_+=0} = \frac{-3G_{i+1,1}^k + 4G_{i+1,2}^k - G_{i+1,3}^k}{2\Delta y_+} \quad (3.44)$$

Où la fonction G représente T , U ou W .

Il vient ainsi :

$$Nu = \frac{3T_{i+1,1}^k - 4T_{i+1,2}^k + T_{i+1,3}^k}{4\Delta y_+} \frac{1}{C_5 C_1^{-1} Re_{\infty}^{-\frac{1}{2}}} \quad (3.45)$$

$$C_5 C_1^{-1} Re_{\infty}^{-\frac{1}{2}} Nu = \frac{3T_{i+1,1}^k - 4T_{i+1,2}^k + T_{i+1,3}^k}{4\Delta y_+} \quad (3.46)$$

$$C_2 C_1^{-1} Re_{\infty}^{\frac{1}{2}} C_{fu} = \frac{-3U_{i+1,1}^k + 4U_{i+1,2}^k - U_{i+1,3}^k}{\Delta y_+} \quad (3.47)$$

3.3.5 Algorithme et organigramme de calcul

3.3.5.1 Algorithme de calcul

- 1- Entrée des données : la température et la vitesse de l'air à l'entrée ainsi que la température à la paroi ;
- 2- Spécification des paramètres de calcul : le pas de calcul, le demi-angle au sommet θ_0 du cône ;
- 3- Définition des conditions à la paroi et au point d'arrêt O ($Ip = 1$) ;
- 4- Initiation de l'épaisseur de la couche limite caractérisée par JMAX et démarrage du calcul pour $Ip = 2$;
- 5- Initialisation des profils de température et de vitesse dans la couche limite ;
- 6- Définition des conditions à la frontière de la couche limite ;
- 7- Résolution des équations de transfert dans la couche limite ainsi que l'équation de continuité pour trouver la vitesse normale V (itération n) ;
- 8- Exploration de la couche limite : si le test

$$\left| \frac{G_{i+1, j_{\max}+1}^k - G_{i+1, j_{\max}}^k}{\max(G_{i+1, j_{\max}}^k, G_{i+1, j_{\max}+1}^k)} \right| \leq 10^{-3} \quad (3.48)$$

$$G = T, U, W$$

n'est pas vérifié, on revient à l'étape 6 pour JMAX+1 ; sinon, on passe à l'étape suivante ;

- 9- Vérification de la convergence sur la température et les vitesses : si le test

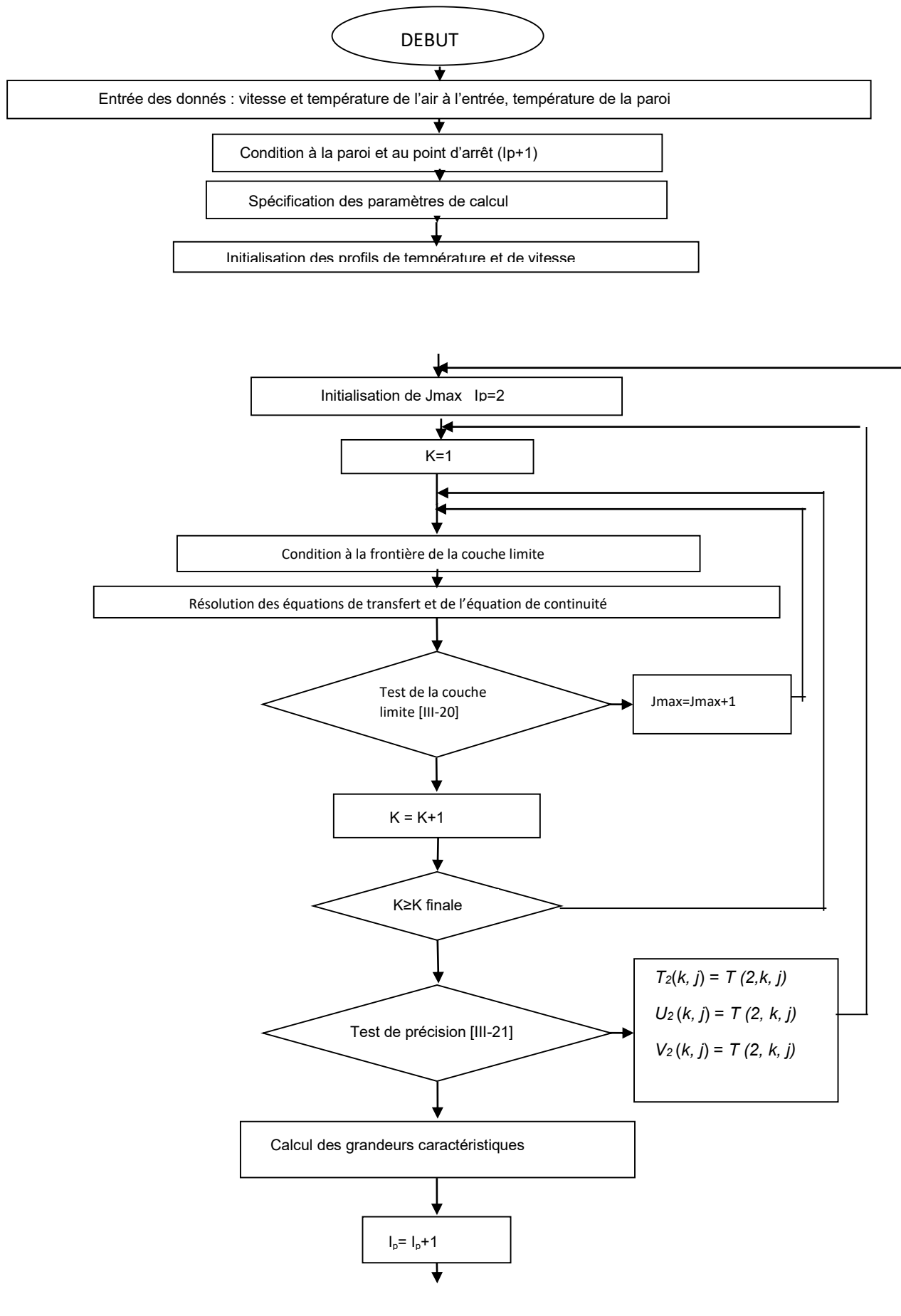
$$\left| \frac{G_{i+1, j}^{k(n)} - G_{i+1, j}^{k(n-1)}}{\max(G_{i+1, j}^{k(n)}, G_{i+1, j}^{k(n-1)})} \right| \leq 10^{-3} \quad (3.49)$$

est vérifié, on passe à l'étape suivante, sinon, on revient à l'étape 6 (itération n+1) ;

- 10- Détermination des grandeurs caractéristiques des transferts : Nu , Cfu , Cfw ;
- 11- Sortie et affichage des résultats ;
- 12- Reprise de calcul à l'étape 5 pour passer au nœud de calcul suivant ($Ip + 1$) ;
- 13- Arrêt du calcul.

3.3.5.2 Organigramme de calcul

La figure 3.2 donne une vision d'ensemble de la façon dont est réalisée la résolution des systèmes d'équations associées à notre problème.



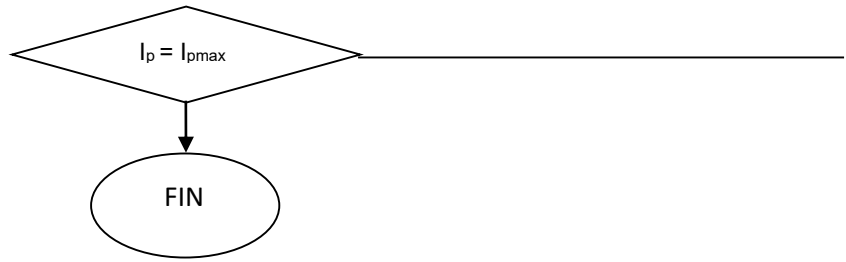


Figure 3. 2 : Représentation schématique du processus de calcul.

Chapitre 4

PRESENTATION DES RESULTATS DES CALCULS RELATIFS A LA COUCHE LIMITE

Ce dernier chapitre rassemble les résultats issus des calculs de la répartition des vitesses et de températures dans la couche limite qui se développe autour du système constitué d'un cône de révolution de demi-angle d'ouverture θ_0 . La longueur caractéristique de la génératrice est prise comme longueur caractéristique. L'effet de la géométrie du corps, ainsi que l'influence de sa vitesse de rotation sur les grandeurs caractéristiques de transfert seront étudiés.

4.1 Résultats numériques et discussions

4.1.1 Choix de discrétisation et validation

4.1.1.1 Choix de discrétisation

La surface de ce cône est subdivisée en parallélépipèdes élémentaires curvilignes de NP nombre de parallèles Δx et de NM nombre de l'azimutale nommé $\Delta\phi$ pour avoir le maillage qui assure une bonne attente entre une place mémoire et un temps de calcul raisonnables et une bonne précision de ce dernier. Pour les parallélépipèdes élémentaires, on a pris NP = 15 et la distance correspondante est $\Delta x = 0,071$, NM = 49 donc $\Delta\phi = 7,5^\circ$ qu'on a recueilli dans la littérature par ALidina [27]. Et pour la distance normale à la paroi, de cette dernière jusqu'à la frontière à la couche limite, nous avons divisé cette distance de Jmax de nombre et distances élémentaires nommée Δy et on a pris Jmax=1500 et $\Delta y = 0,0001$ ce qui est recueilli dans la littérature par Bezandry [9].

4.1.1.2 Validation dans le cas de la convection forcée

Pour prouver l'exactitude de nos résultats, nous validons le code numérique en comparant les résultats issus de nos calculs avec ceux déduits de la littérature [8]. La Figure 4-0, illustrant

l'évolution du coefficient de frottement suivant x en fonction de l'abscisse curviligne adimensionnelle x_+ pour $B = 0$, $Pr = 0.7$ montre que nos résultats sont en harmonies avec ceux de la littérature, la superposition de ces deux courbes montre que l'écart relatif ne dépassant pas 5%, et rendent nos calculs valables scientifiquement. Maintenant on discute les résultats de notre simulation.

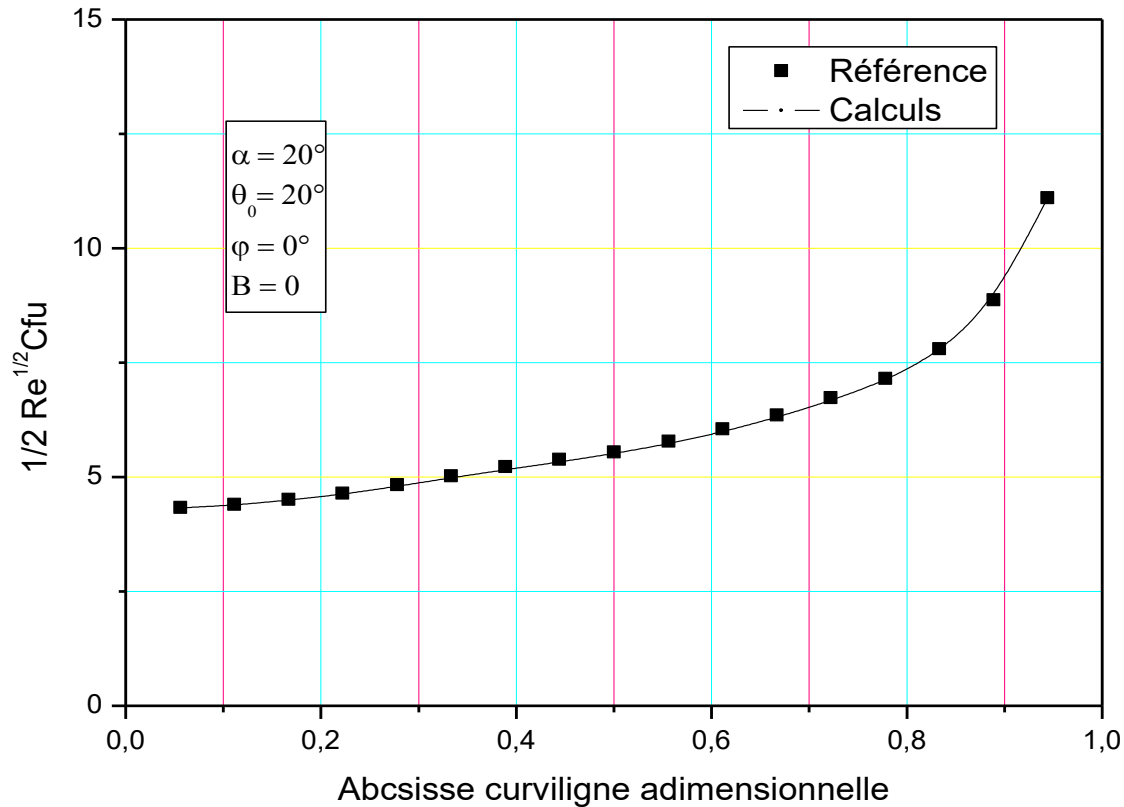


Figure 4. 0 : Comparaison du coefficient de frottement pariétal en fonction de x_+ , pour $B=0$, $\alpha = 20^\circ$, $\varphi = 0^\circ$ et $\theta_0 = 20^\circ$

Nous considérons le cas de $Pr = 0,7$, la longueur caractéristique égale à 1m, $T_p = 373$ K et $To=273$ K.

Les $I_p = 2 ; 5 ; 7 ; 9 ; 11 ; 12, 13$ correspondent respectivement à $x_+ = 0,071 ; 0,286 ; 0,429 ; 0,571 ; 0,714 ; 0,786, 0,857$.

4.1.2 Ecoulement axisymétrique $\alpha = 0^\circ$

Dans cette présentation, nous nous consacrons toutefois sur quelques grandeurs adimensionnelles seulement afin d'apporter une brève explication du phénomène physique du système axisymétrique.

4.1.2.1. Composante méridienne et température adimensionnelle

Les courbes de la figure 4.1 montrent l'évolution de la vitesse méridienne adimensionnelle en fonction de x_+ pour plusieurs valeurs de B . Sa valeur est maximale sur les positions méridiennes $x_+ = 0$ et $x_+ = 1$, sur sa surface elle augmente linéairement suivant la croissance de x_+ , l'augmentation du paramètre de rotation B diminue la vitesse suivant la méridienne sur la paroi.

Les courbes des figures 4.2 et 4.4 illustrent l'évolution de la composante méridienne adimensionnelle en fonction de la distance normale adimensionnelle y_+ . Elle varie linéairement dans la couche limite suivant la normale à la paroi et que l'épaisseur de la couche limite évolue très rapidement le long de celle-ci. Cependant, proche de la paroi l'effet de la vitesse de rotation du cône et de fluide en convection forcée perturbent l'écoulement et, la vitesse de rotation du cône n'a aucun effet loin de la paroi, seule la vitesse du fluide qui y est présent. Proche de la paroi, plus on s'éloigne du sommet du cône, le rayon augmente et le coefficient de rotation B devient de plus en plus important, en autre terme, la vitesse de rotation du corps croît, cette croissance amoindrit l'intensité de la composante méridienne.

Les figures 4.4 et 4.5 nous montrent ainsi que la grandeur discutée semble uniforme sur la surface diamétrale du cône et on remarque aussi que l'épaisseur de la couche limite est pratiquement invariable quelle que soit la valeur de ϕ (figure 4.4).

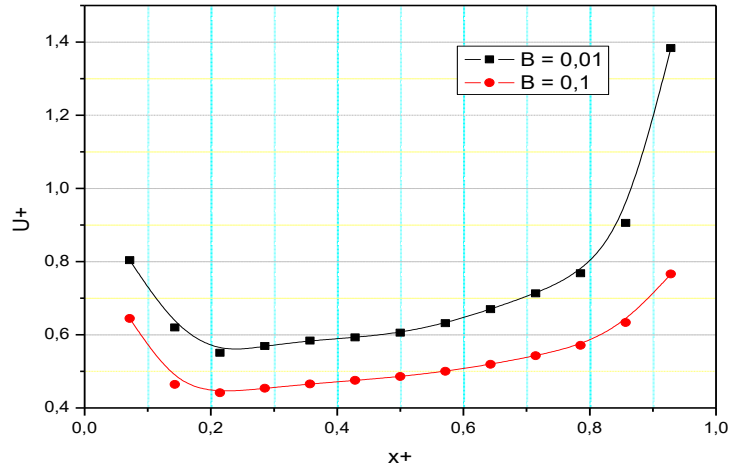


Figure 4.1.1 : $\theta_0=20^\circ$

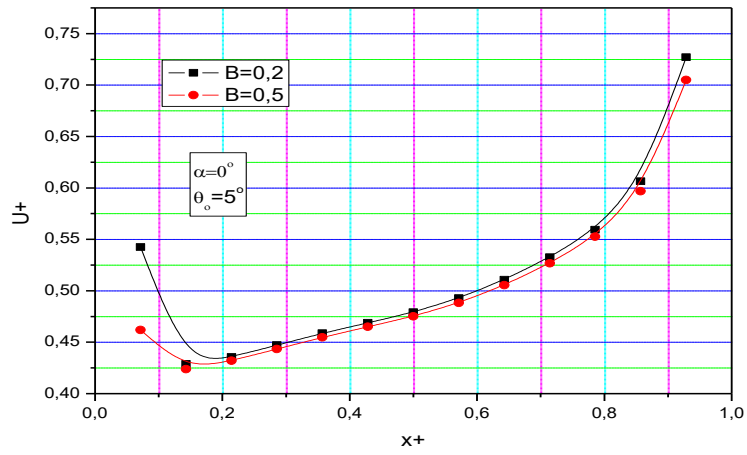


Figure 4.1.2

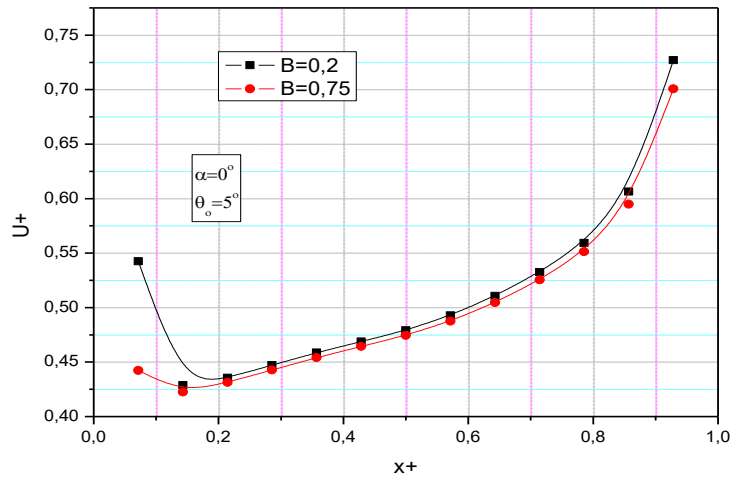


Figure 4.1.3

Figure 4.1: Evolution de la vitesse méridienne adimensionnelle en fonction de x^+ pour plusieurs valeurs de B .

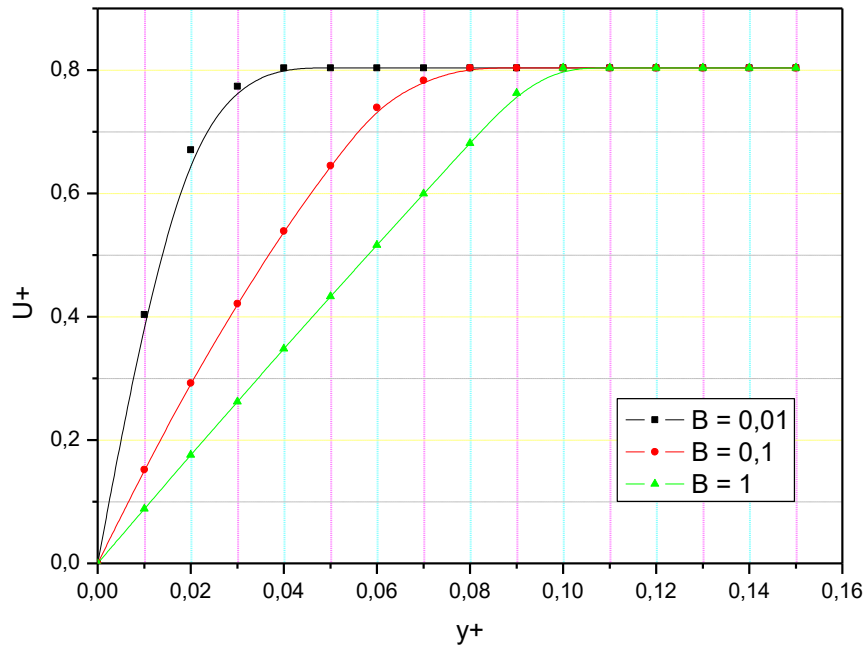


Figure 4.2.1 : $I_p=2$

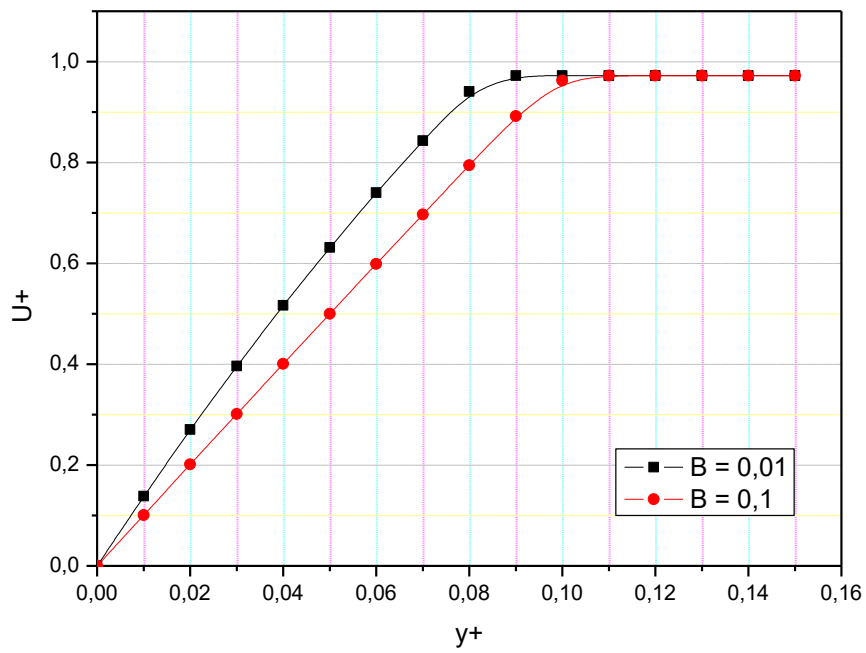


Figure 4.2.2 : $I_p=5$

Figure 4.2 : Evolution de la vitesse méridienne adimensionnelle en fonction de y_+ pour $\theta_o = 20^\circ$, $\varphi = 60^\circ$, $\alpha=0^\circ$ et plusieurs valeurs de B .

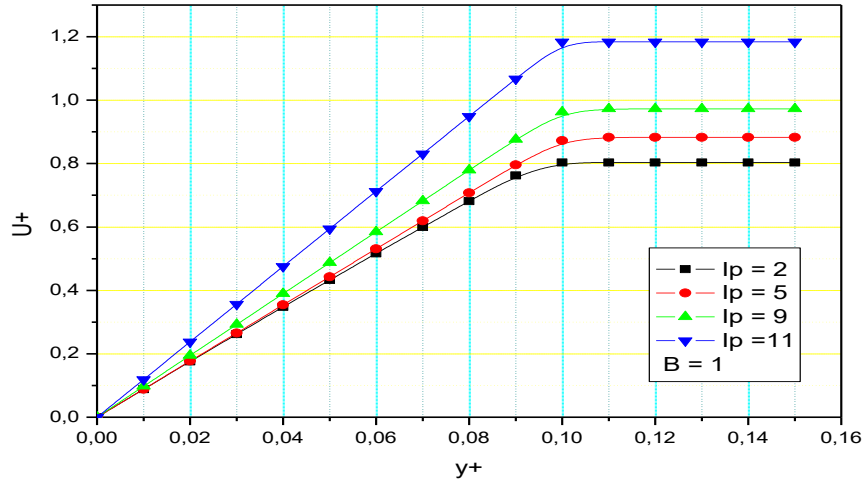


Figure 4.3.1

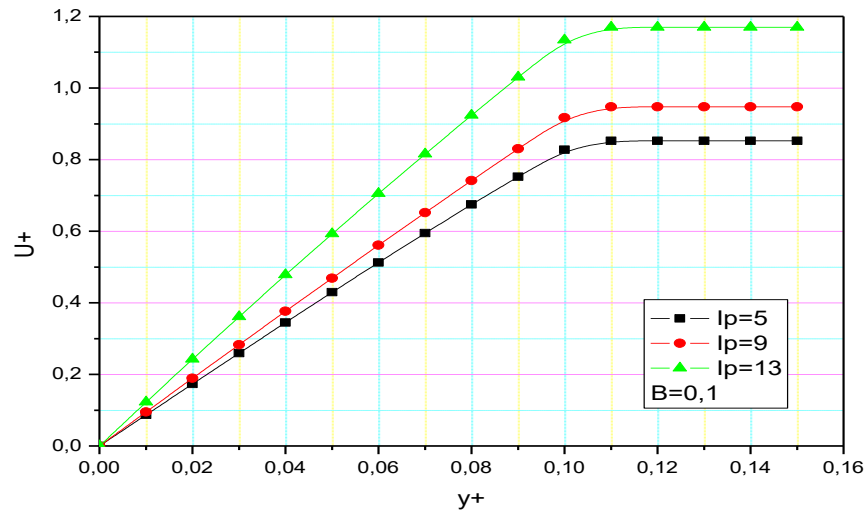


Figure 4.3.2

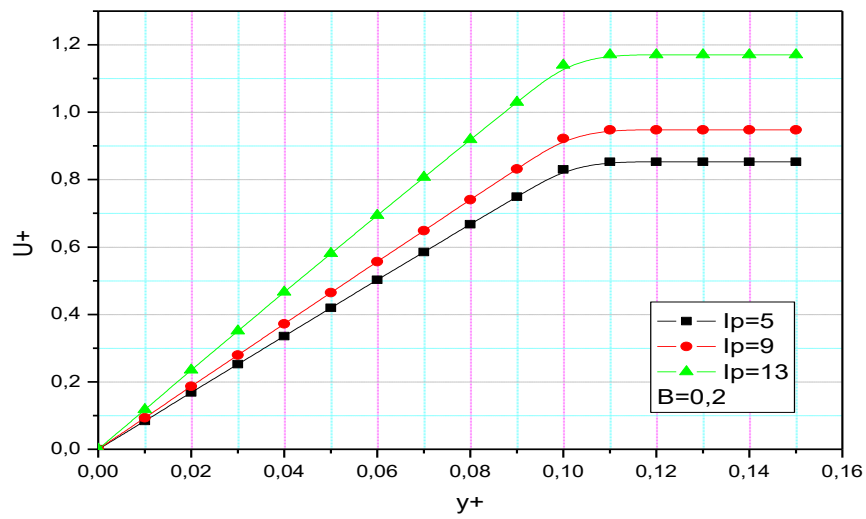


Figure 4.3.3 :

Figure 4.3: Evolution de la vitesse méridienne adimensionnelle en fonction de y_+ pour $\theta_o = 20^\circ$, $\varphi = 60^\circ$ et plusieurs valeurs de I_p .

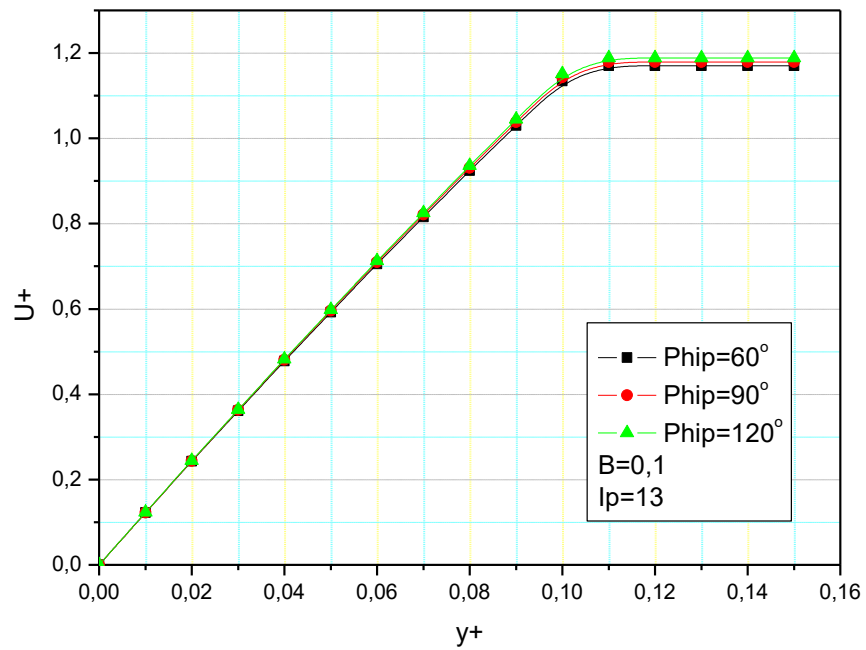


Figure 4.4 : Evolution de la vitesse méridienne adimensionnelle en fonction de y_+ , pour $I_p=13$, $B=0.1$ et pour plusieurs valeurs de ϕ .

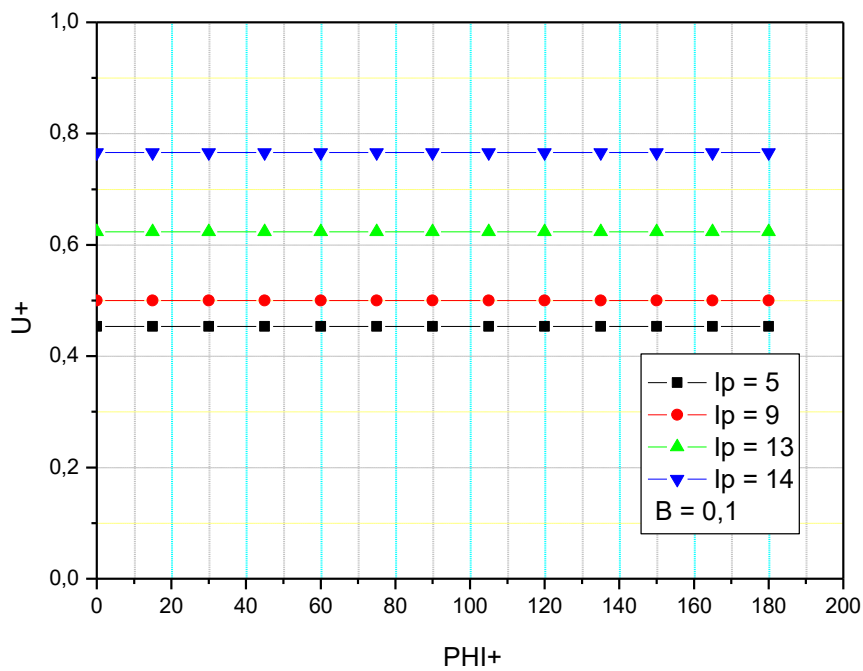


Figure 4.5 : Evolution de la vitesse méridienne adimensionnelle en fonction de ϕ^+ , pour $\alpha=0^\circ$, $B=0.1$ et plusieurs valeurs de I_p

La figure 4.6 illustre les courbes de variation de la température en fonction de x_+ pour $\phi=60^\circ$ et plusieurs valeurs de B . On observe que, pour y_+ fixée, le champ de température est pratiquement uniforme sur la paroi sauf au sommet.

Les figures 4.7 à 4.8 illustrant les variations de la température adimensionnelle T^+ en fonction de y_+ . D'une part, à la paroi sa valeur est maximale et est fonction décroissante de y_+ ; d'autre part, elle diminue en s'écartant de la paroi et enfin plus B est grand ou la vitesse du cône augmente ou encore on est loin du sommet O , le rayon du cône est plus important, alors la variation de la température est moins élevée et cela au fur et à mesure que y_+ augmente : à cause de la vitesse de rotation du cône et de fluide en convection forcée, la chaleur n'a pu convenablement se transmettre par convection de particule qui leur avoisinent et ainsi de suite. Ce phénomène est plus marqué pour les particules plus éloignées. Par ailleurs, et est remarquable que plus on éloigne du sommet O , plus B est important.

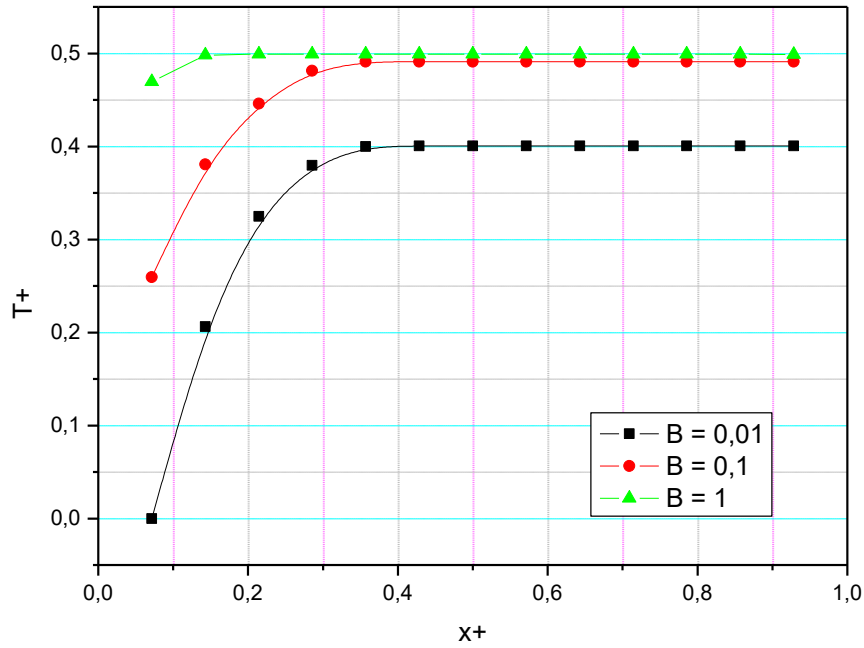


Figure 4.6 : Evolution de la température adimensionnelle T^+ en fonction de x_+ pour $\theta_o = 20^\circ$, $\varphi = 60^\circ$ et plusieurs valeurs de B .

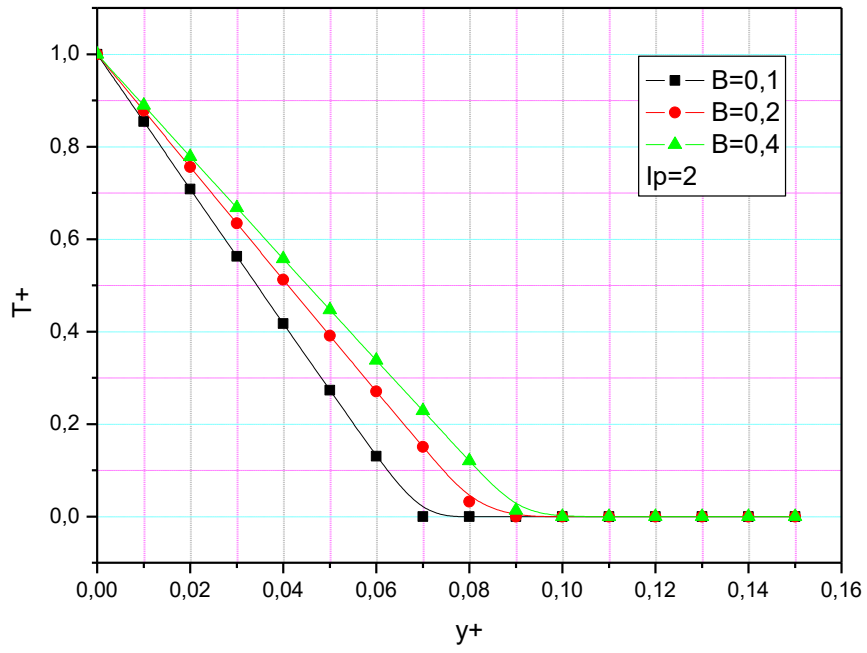


Figure 4.7.1

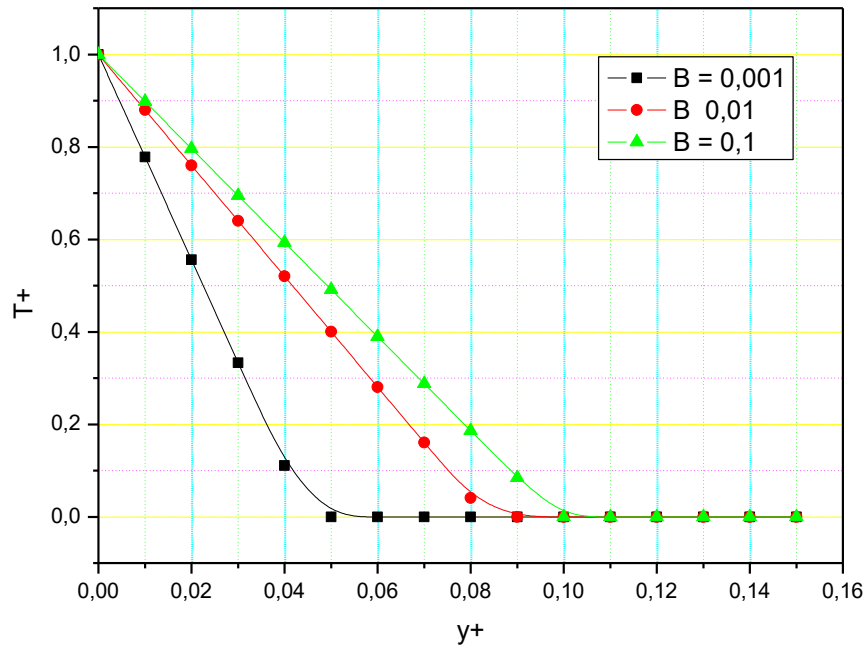


Figure 4.7.2

Figure 4.7: Evolution de la température adimensionnelle T^+ en fonction de y_+ pour $\theta_o = 20^\circ$, $\varphi = 60^\circ$ et plusieurs valeurs de B .

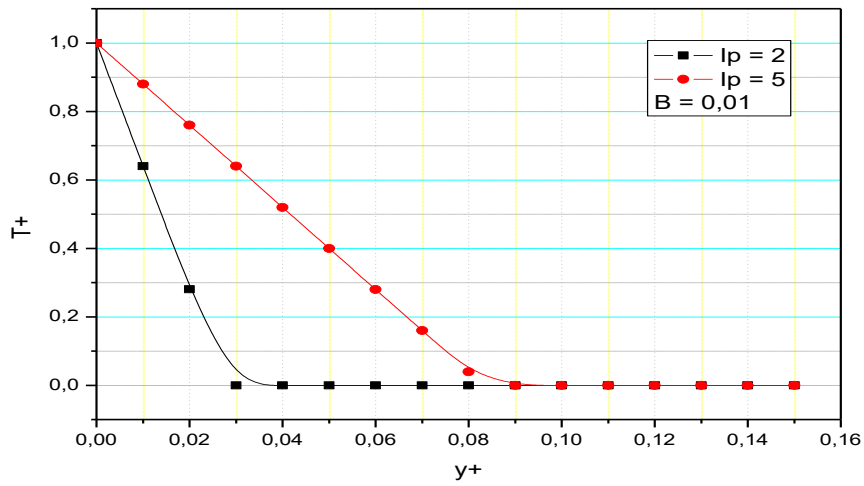


Figure 4.8.1

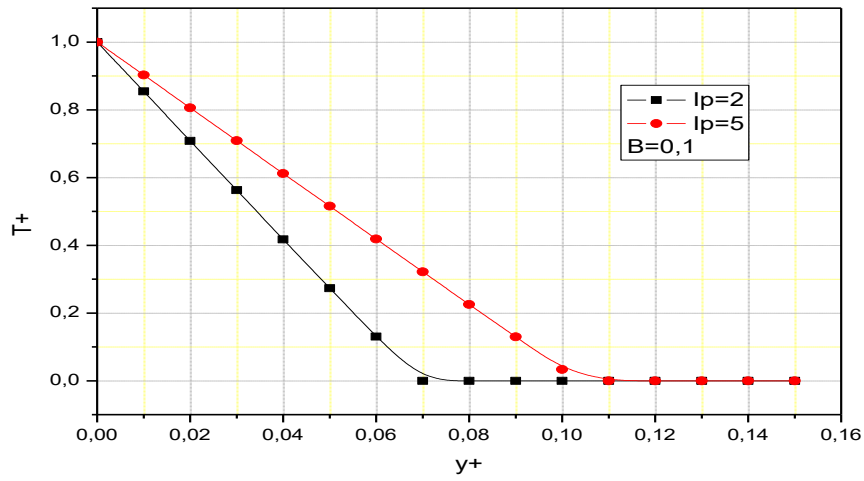


Figure 4.8.2

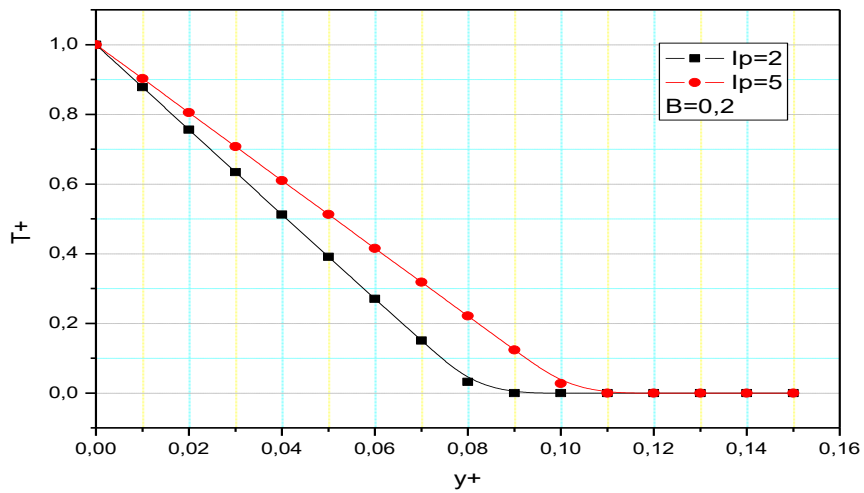


Figure 4.8.3

Figure 4.8: Evolution de la température adimensionnelle T^+ en fonction de y_+ pour $\theta_o = 20^\circ$, $\varphi = 60^\circ$ et plusieurs valeurs de Ip .

4.1.2.2 Nombre de Nusselt Nu et coefficient de frottement méridienne Cfu

Les figures 4.9.1 et 4.9.1 illustrent les variations du nombre de Nusselt local en fonction de x_+ . Les résultats montrent que l'échange thermique entre la paroi et le fluide se réalise de manière pratiquement uniforme le long de la surface du cône, à l'exception du point d'arrêt où la vitesse de rotation est nulle, l'échange est élevé et le nombre de nusselt décroît rapidement par la perturbation de rotation du cône. Le long du cône sa valeur est constante sauf au point d'arrêt.

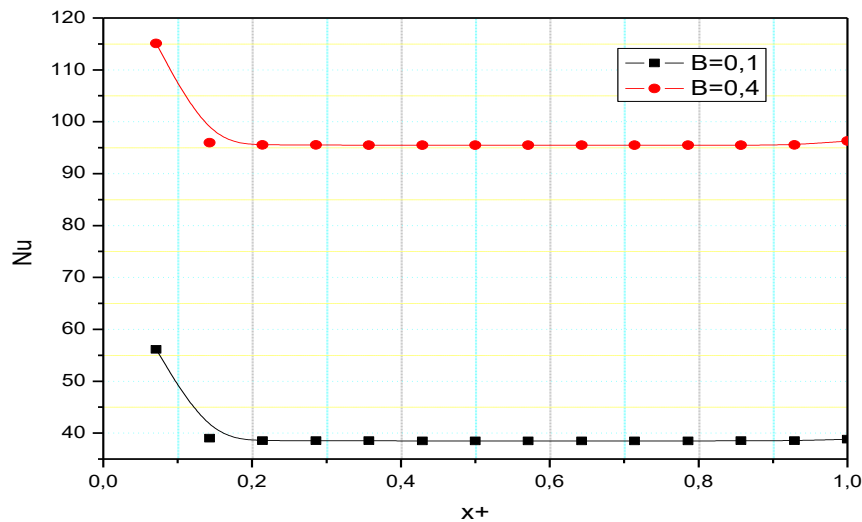


Figure 4.9.1: $Ec=2$.

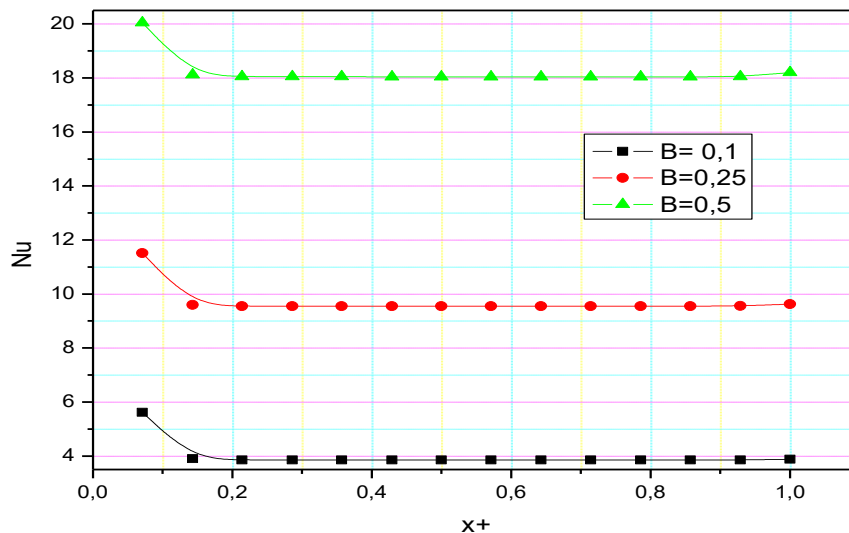


Figure 4.9.2 : $Ec=0,2$.

Figure 4.9 : Evolution du nombre de Nusselt en fonction de x_+ pour Ec fixé, $\alpha=0$, et plusieurs valeurs de paramètre de rotation B .

Les figures 4.10.1 et 4.10.2 illustrant la variation du coefficient de frottement pariétal en fonction de x_+ . Sa variation est uniforme le long de la surface du cône et la particule s'adhère à la paroi, ce nombre prend la valeur maximale sur la position méridienne $x_+=1$ qui exprime qu'il y a l'intense adhérence du fluide en ce lieu. Elle montre que le frottement à la paroi est maximal aux voisinages des extrémités du cône, siège de forte perturbation de l'écoulement.

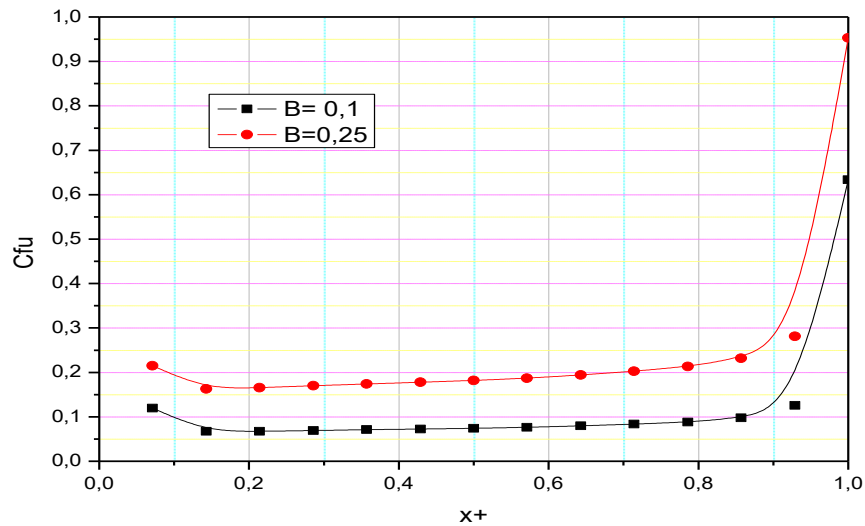


Figure 4.10.1

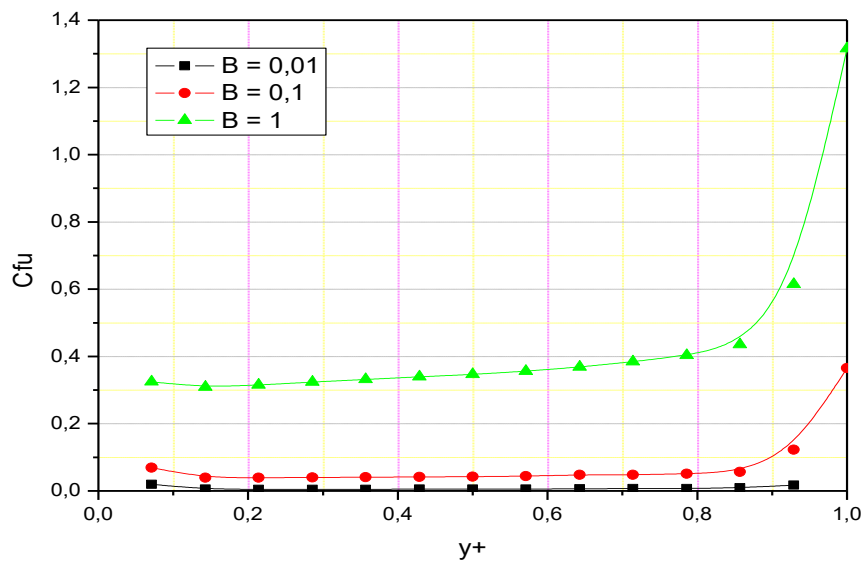


Figure 4.10.2

Figure 4.10: Evolution du coefficient de frottement pariétal méridien en fonction de x_+ , pour $I_p=5$, $\varphi=60^\circ$, $\alpha=0$ et plusieurs valeurs de paramètre de rotation B

4.1.3 Ecoulement dissymétrique $\alpha \neq 0^\circ$

4.1.3.1 Composante méridienne adimensionnelle U^+

Les courbes des figures 4.11 à 4.15 illustrent les variations de la composante méridienne U^+ en fonction de la coordonnée normale adimensionnelle y^+ . Cette vitesse augmente suivant y^+ dans la couche limite. Ces figures montrent que la composante méridienne U^+ passe de la valeur nulle sur la paroi à sa valeur à la frontière. Cette dernière est finie. Et on sait qu'à l'extérieur de la couche limite règne les fluides à la vitesse de la convection forcée.

Pour α et Ip fixés, et plusieurs valeurs de B , la pente de ses courbes diminue lorsque le paramètre de rotation B augmente dans la couche limite figure 4.9 et se termine par une même valeur à la paroi. Par contre, pour la valeur du paramètre de rotation B , α et θ_0 fixé et pour plusieurs valeurs de Ip , les courbes de la figure 4.13 indiquent que l'épaisseur de la couche limite varie suivant ce dernier.

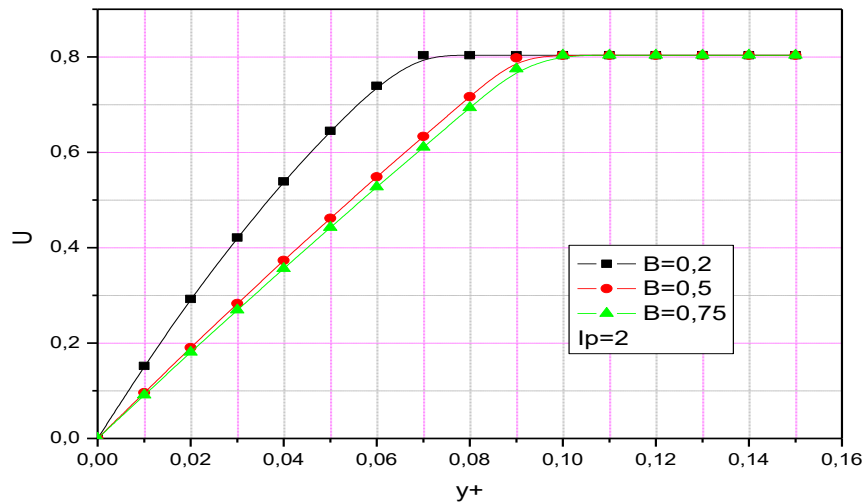


Figure 4.11 : Evolution de la vitesse méridienne adimensionnelle en fonction de y^+ pour $\theta_o = 10^\circ$, $\phi = 60^\circ$, $\alpha=10^\circ$ et plusieurs valeurs de B .

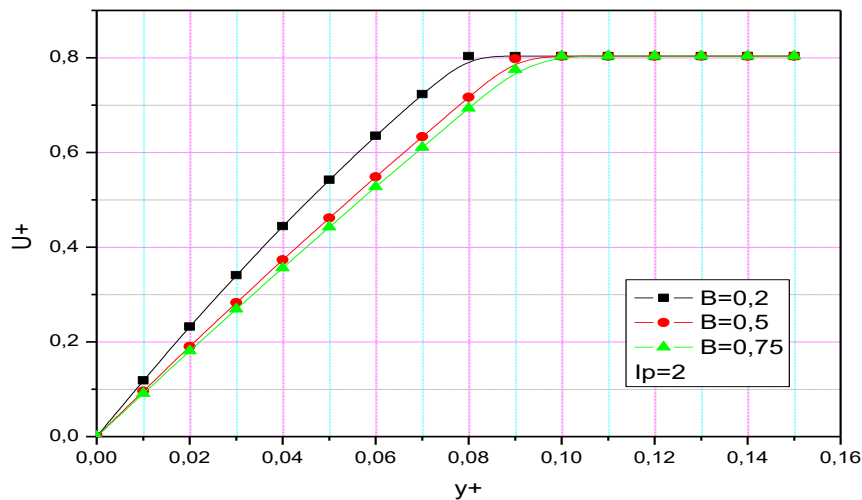


Figure 4.12 : Evolution de la vitesse méridienne adimensionnelle en fonction de y^+ pour $\theta_o = 20^\circ$, $\phi = 60^\circ$, $\alpha=10^\circ$ et plusieurs valeurs de B .

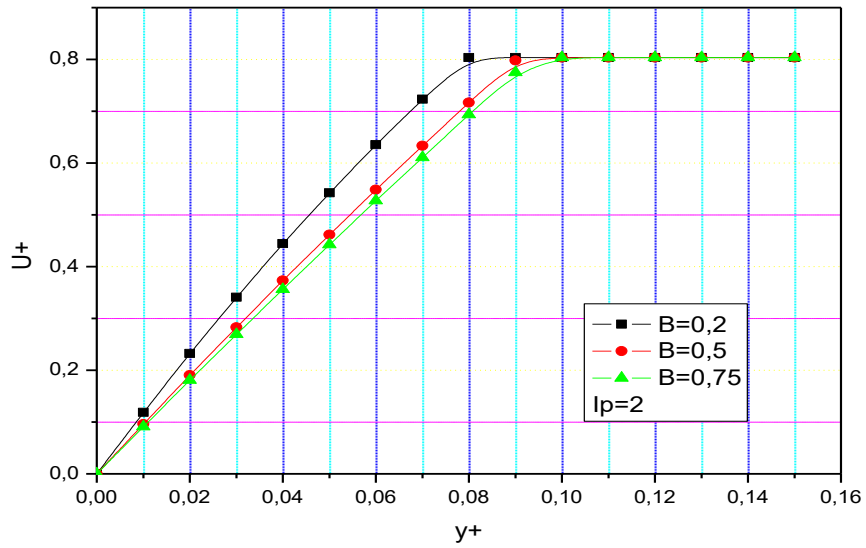


Figure 4.13: Evolution de la vitesse méridienne adimensionnelle en fonction de y_+ pour $\theta_o = 30^\circ$, $\varphi = 60^\circ$, $\alpha = 10^\circ$ et plusieurs valeurs de B .

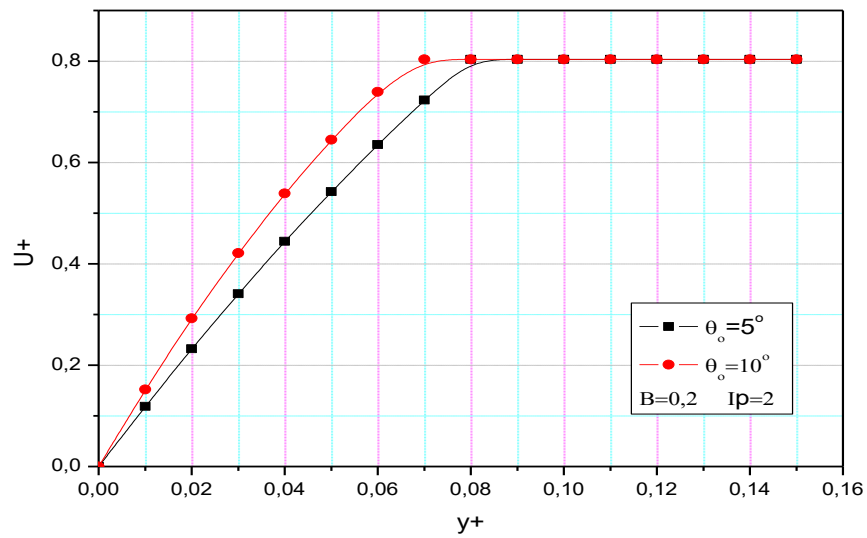


Figure 4.14 : Evolution de la vitesse méridienne adimensionnelle en fonction de y_+ pour $\varphi = 60^\circ$, $\alpha = 10^\circ$ et plusieurs valeurs de l'angle d'ouverture θ_o .

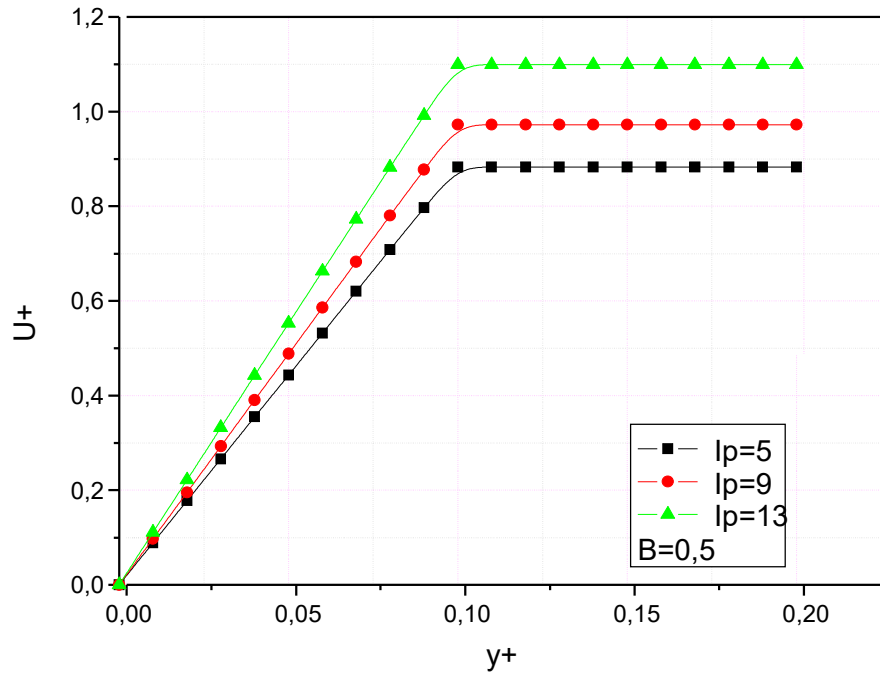


Figure 4.15.1 : pour $\theta_o = 10^\circ$, $\varphi = 60^\circ$, $\alpha = 10^\circ$,

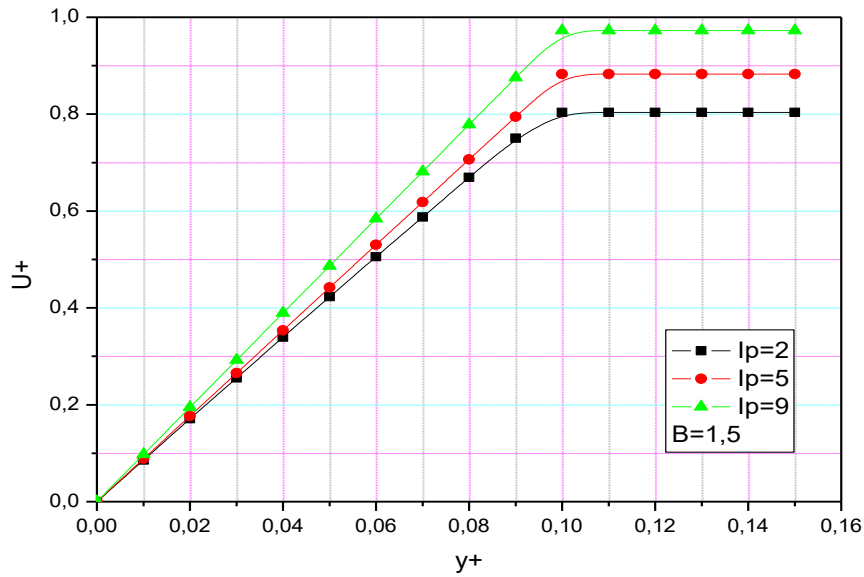


Figure 4.15.2: pour $\theta_o = 20^\circ$, $\varphi = 60^\circ$, $B=1,5$

Figure 4.15: Evolution de la vitesse méridienne adimensionnelle en fonction de y_+ , pour α fixé et plusieurs valeurs de I_p .

Les courbes des figures 4.16 à 4.19 illustrent les variations de la composante méridienne adimensionnelle U_+ en fonction φ_+ . Ce profil de vitesse augmente suivant φ_+ et sous forme sinusoïdale. Pour le demi-angle d'ouverture θ_o , l'abscisse curviligne adimensionnelle x_+ et le paramètre de rotation B fixés et pour plusieurs valeurs de l'angle d'inclinaison α , les figures 4.16.1 et 4.16.2 nous montrent que l'augmentation de l'angle d'inclinaison α fait augmenter aussi l'ondulation de la composante méridienne sur la surface diamétrale. Proche du point

d'arrêt, à cause de l'importance de l'ondulation suivant la croissance de l'angle α , la composante méridienne change d'état au voisinage de $\varphi = 45^\circ$. Pour $\varphi < 45^\circ$, l'augmentation de α amoindrit la composante méridienne, pour $\varphi > 45^\circ$ l'augmentation de celle-ci fait augmenter cette composante figure 4.16.1. Mais loin du point d'arrêt, l'augmentation θ_0 diminue cette composante figure 4.16.2. Pour l'angle d'inclinaison α , l'abscisse curviligne adimensionnelle x_+ et le paramètre de rotation B fixés et pour plusieurs valeurs de demi-angle d'ouverture θ_0 , la figure 4.17 nous montre que l'augmentation de ce dernier diminue la composante méridienne. Ainsi pour l'angle d'inclinaison α , le demi-angle d'ouverture θ_0 et l'abscisse curviligne adimensionnelle x_+ fixés et pour plusieurs valeurs de B , la figure 4. 18 nous montre que l'augmentation de ce dernier diminue cette composante. Et enfin pour l'angle d'inclinaison α , le demi-angle d'ouverture θ_0 et du paramètre de rotation B fixés et pour plusieurs valeurs de l'abscisse curviligne adimensionnelle x_+ , plus on s'éloigne du point d'arrêt, plus l'intensité de la vitesse méridienne est important figures 4.19.1 à 4.19.5 nous montrent que l'augmentation de l'abscisse curviligne adimensionnelle augmente la composante méridienne en intensité.

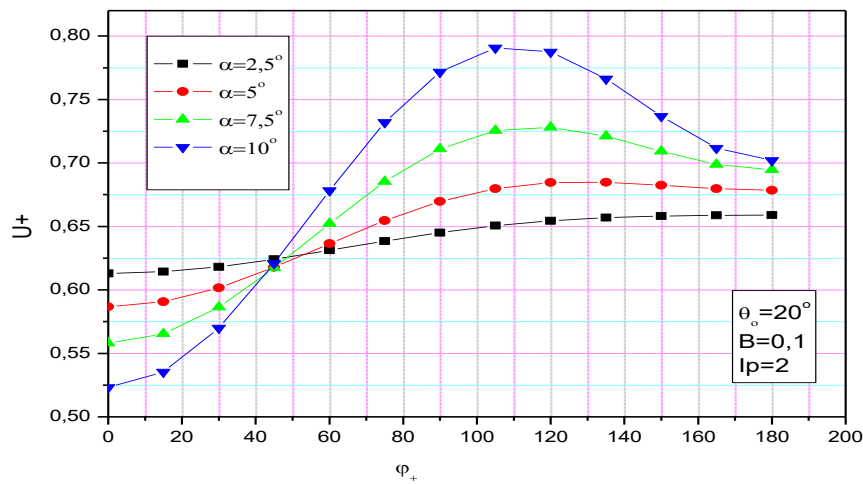


Figure 4.16.1

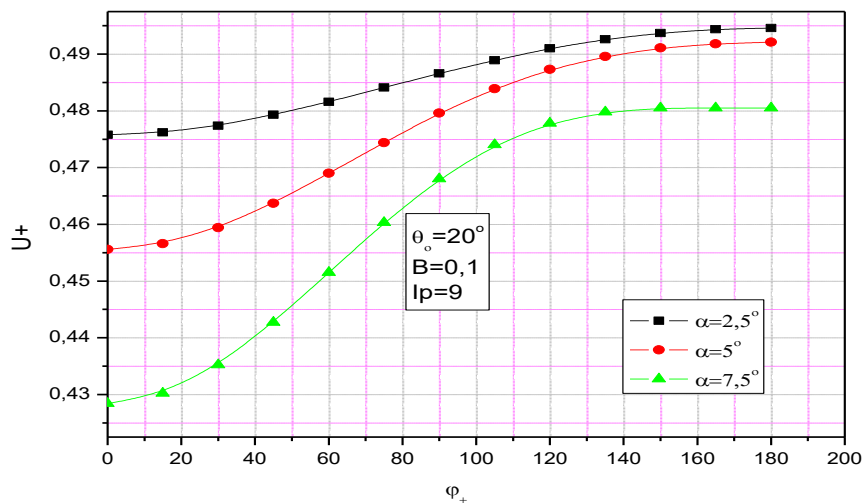


Figure 4.16.2

Figure 4.16 : Evolution de la vitesse méridienne adimensionnelle en fonction de φ_+ , pour plusieurs valeurs angles d'inclinaison α

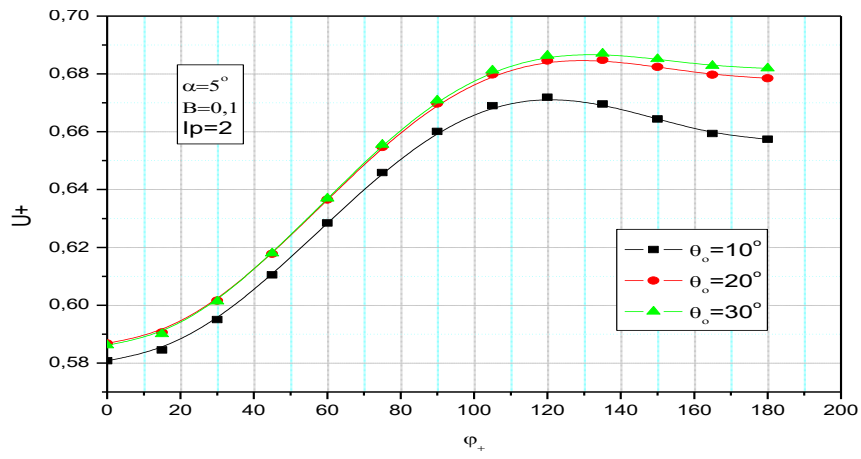


Figure 4.17.1

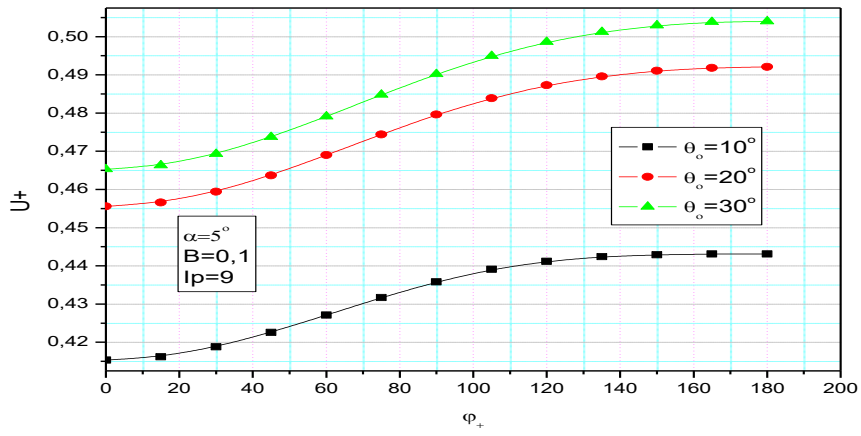


Figure 4.17.2

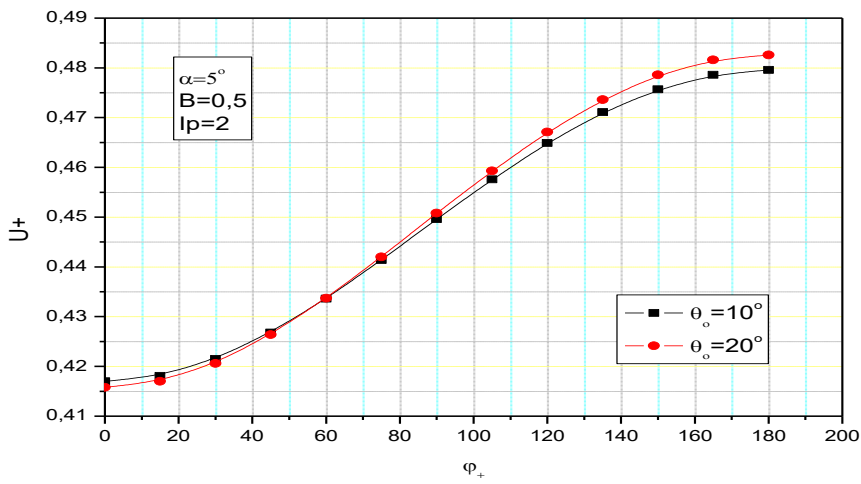


Figure 4.17.3

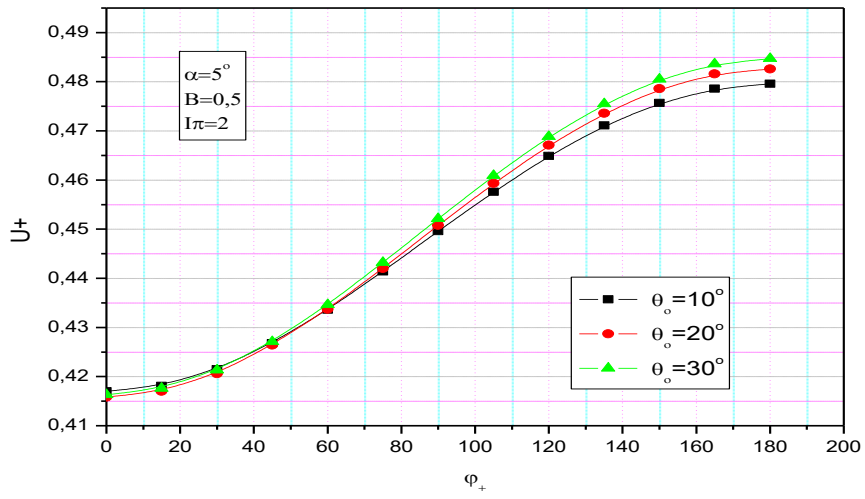


Figure 4.17.4

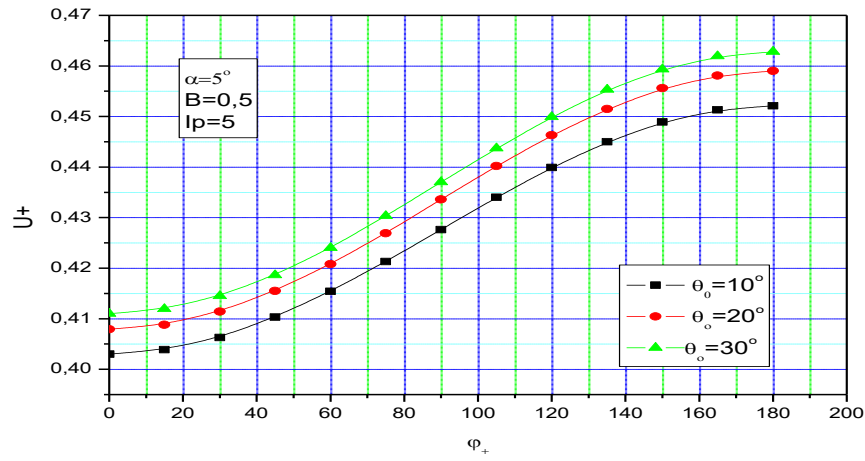


Figure 4.17.5

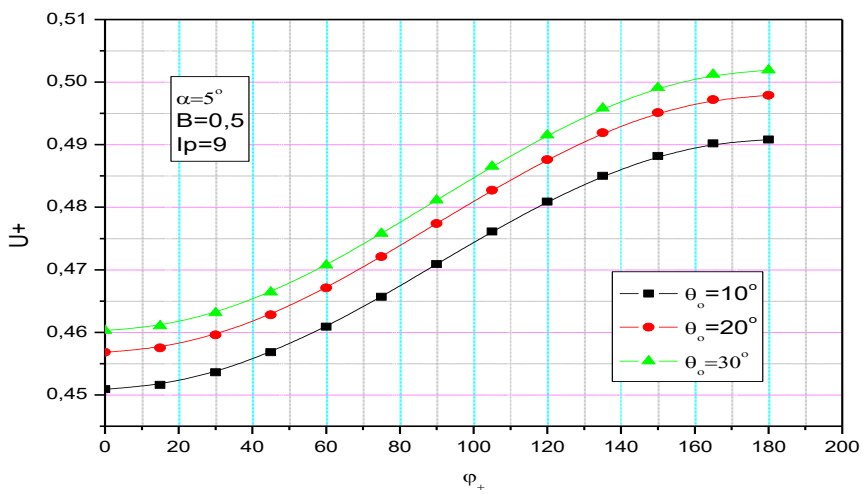


Figure 4.17.6

Figure 4.17 : Evolution de la vitesse méridienne adimensionnelle en fonction de φ_+ , pour plusieurs angles d'ouverture θ_o

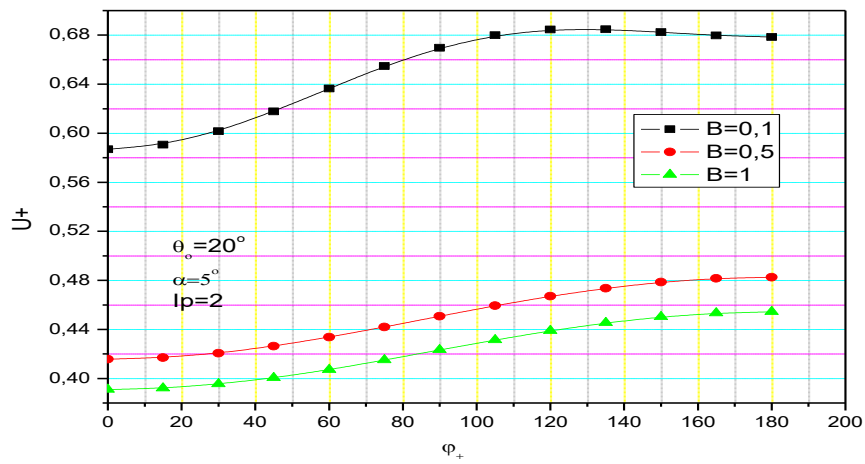


Figure 4.18.1

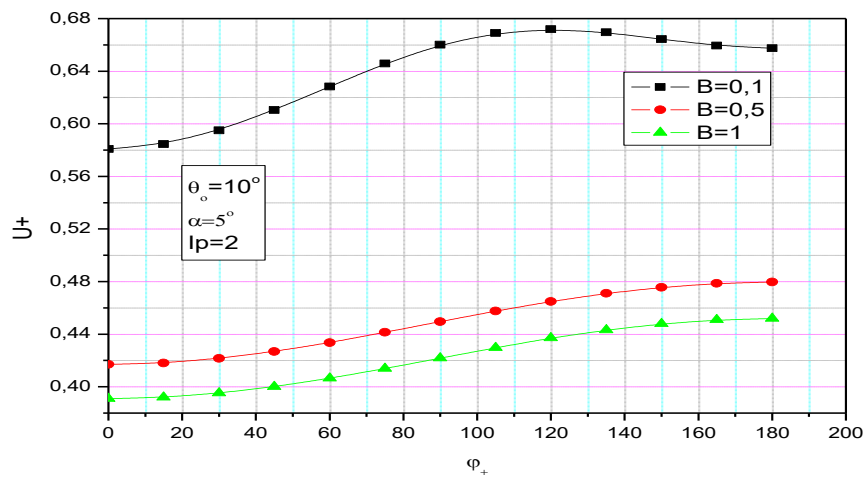


Figure 4.18.2

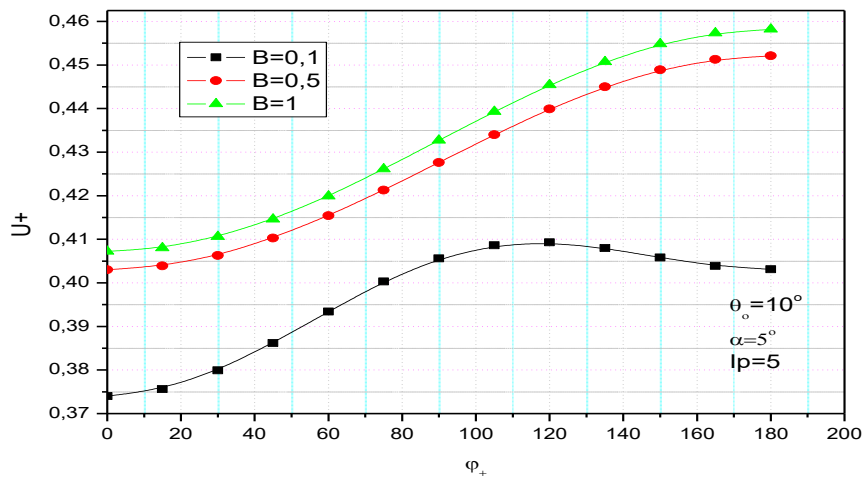


Figure 4.18.3

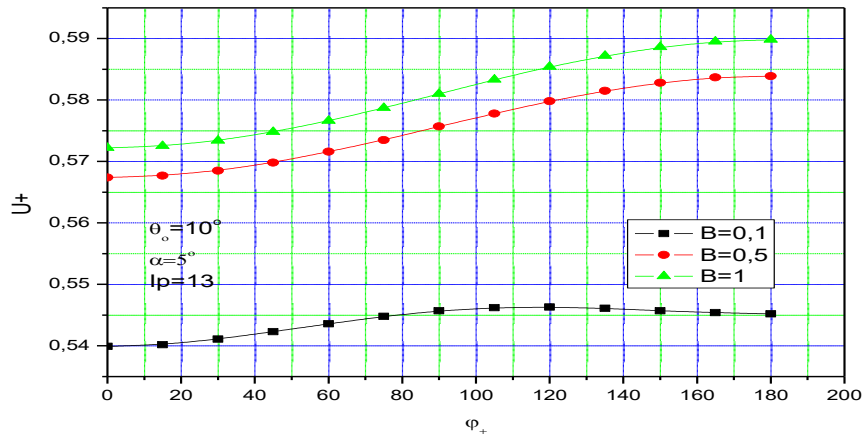


Figure 4.18.4

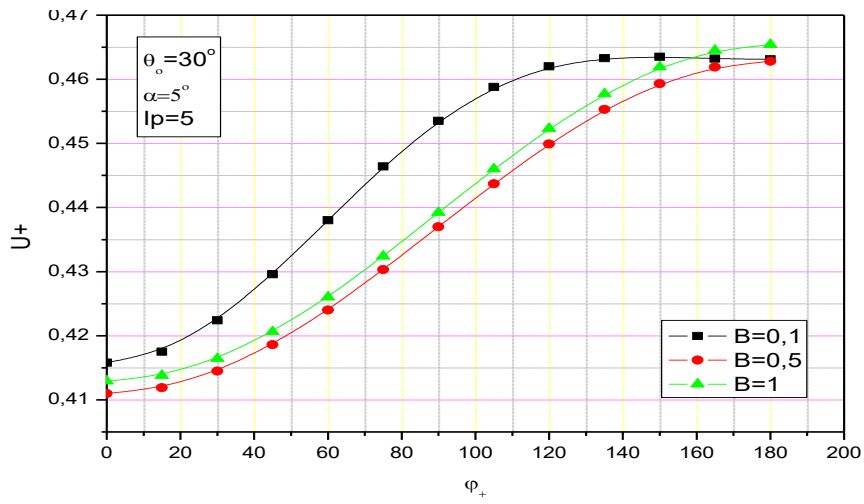


Figure 4.18.5

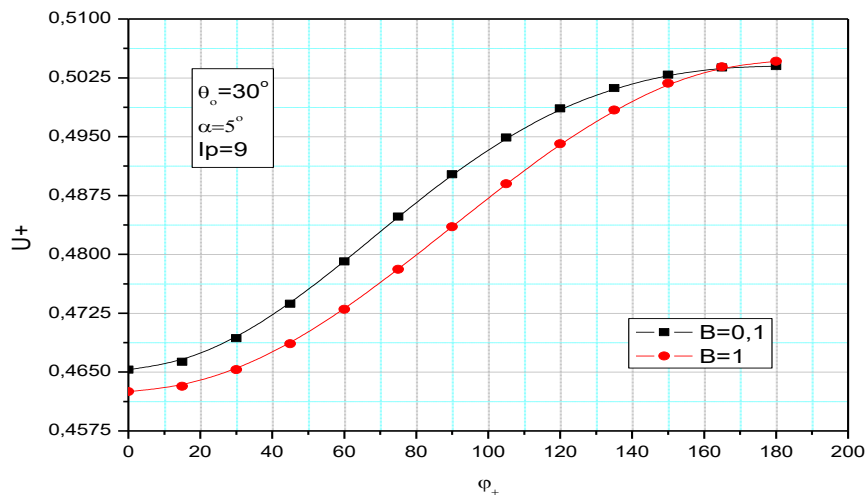


Figure 4.18.6

Figure 4.18: Evolution de la vitesse méridienne adimensionnelle en fonction de φ_+ , pour plusieurs valeurs de paramètre de rotation B

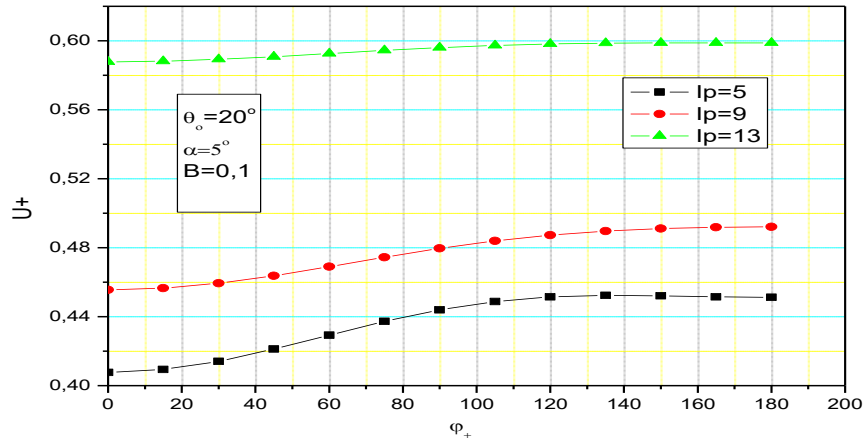


Figure 4.19.1

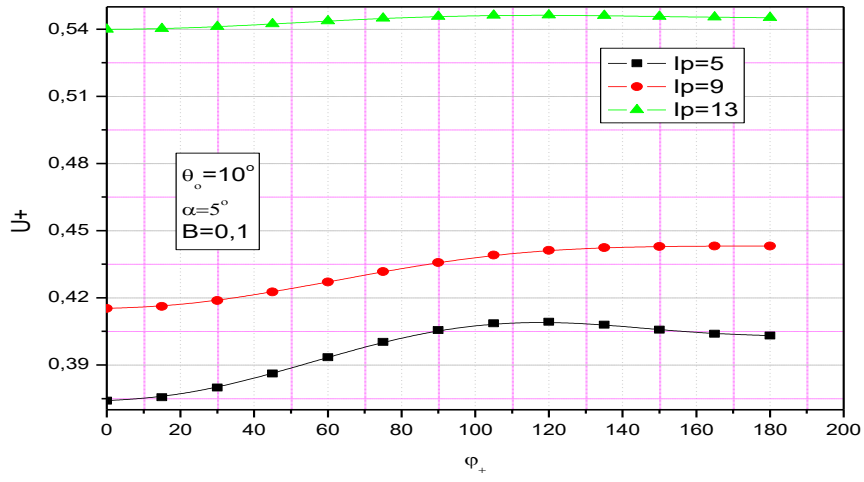


Figure 4.19.2

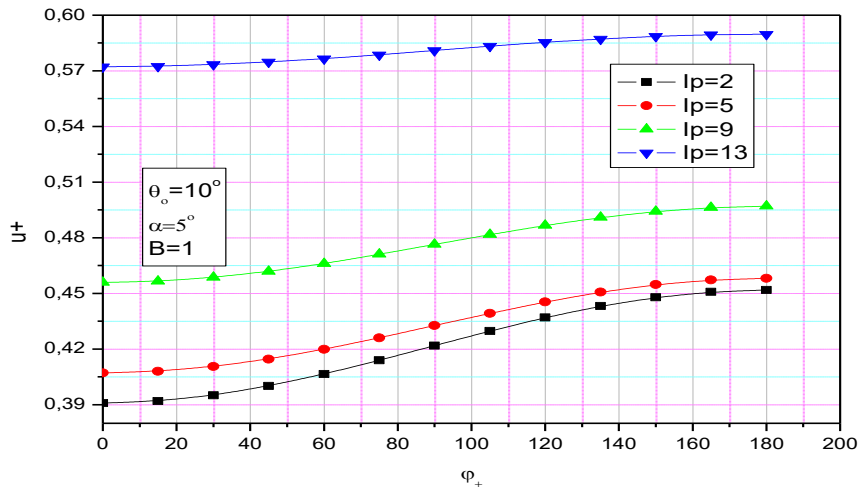


Figure 4.19.3

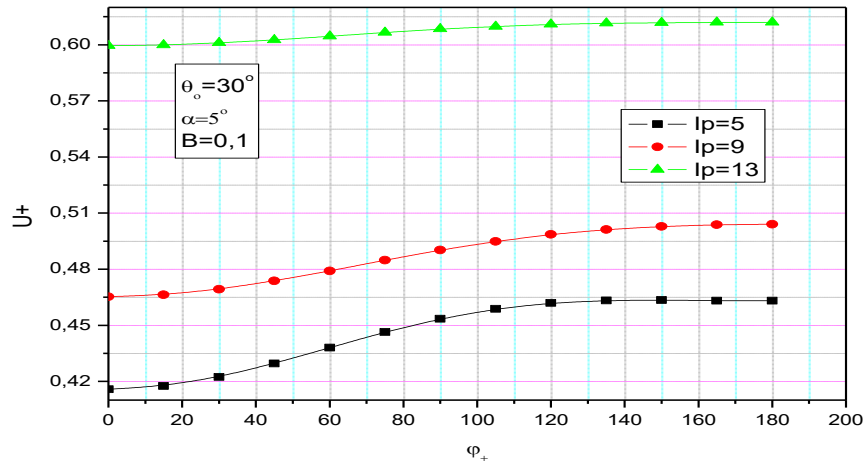


Figure 4.19.4

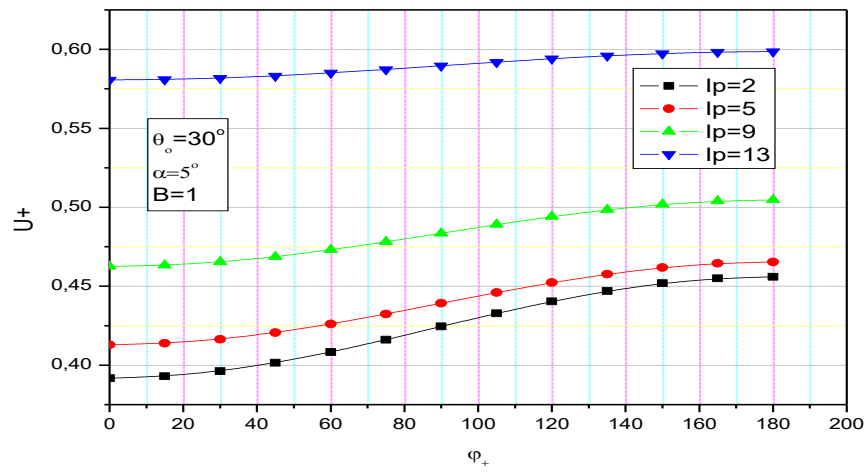


Figure 4.19.5

Figure 4.19: Evolution de la vitesse méridienne adimensionnelle en fonction de φ_+ , pour plusieurs valeurs de I_p

4.1.3.2 Composante normale adimensionnelle V_+

Les figures 4.20.1 et 4.20.2 illustrant les variations de la composante normale adimensionnelle V_y^+ en fonction de x_+ , nous montrent que la vitesse semble constante le long de la paroi et aspiré par celle-ci en ce lieu, sauf au point d'arrêt et à $x_+=1$;

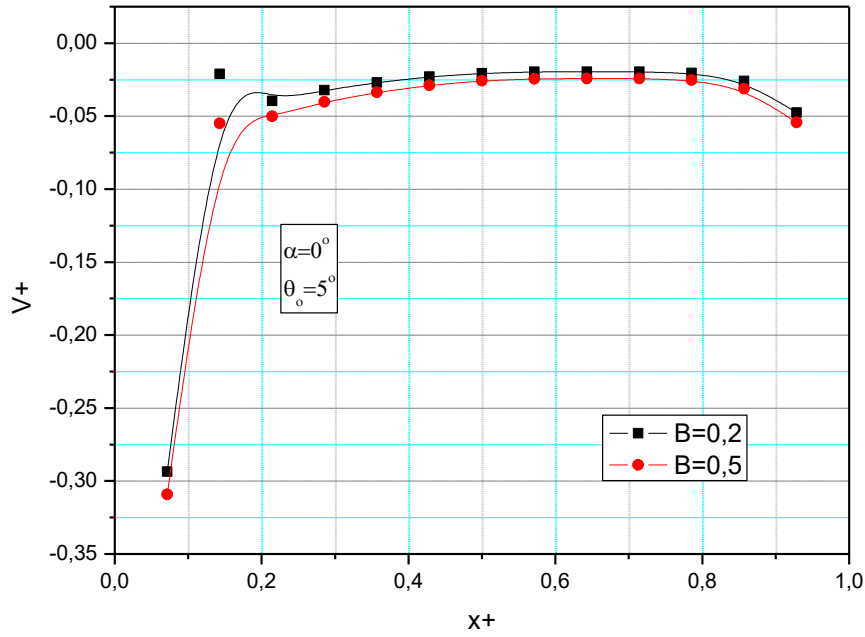


Figure 4.20.1:

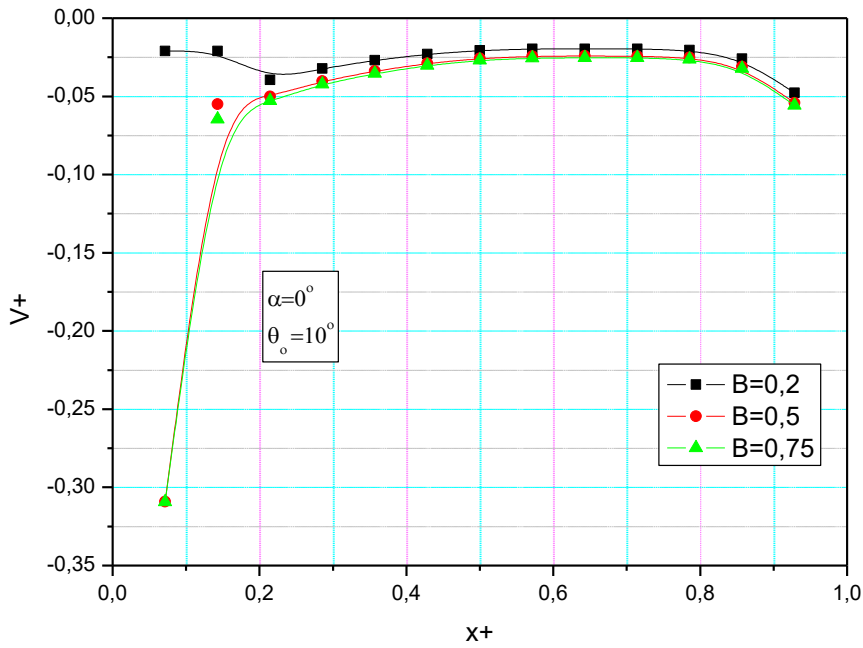


Figure 4.20.2:

Figure 4.20: Evolution de la vitesse normale adimensionnelle en fonction de x_+ pour $\theta_o = 20^\circ$, $\varphi = 60^\circ$ et plusieurs valeurs de B .

Les figures 4.21 à 4.26 illustrant les variations de la composante normale adimensionnelle V_y^+ en fonction de y_+ , nous montrent qu'il y a de domaine où les fluides sont aspirés par la surface du cône ($V^+ < 0$) ou ils sont refoulés par la surface du cône ($V^+ > 0$). Ce résultat est confirmé par les courbes de la figure 4.25.

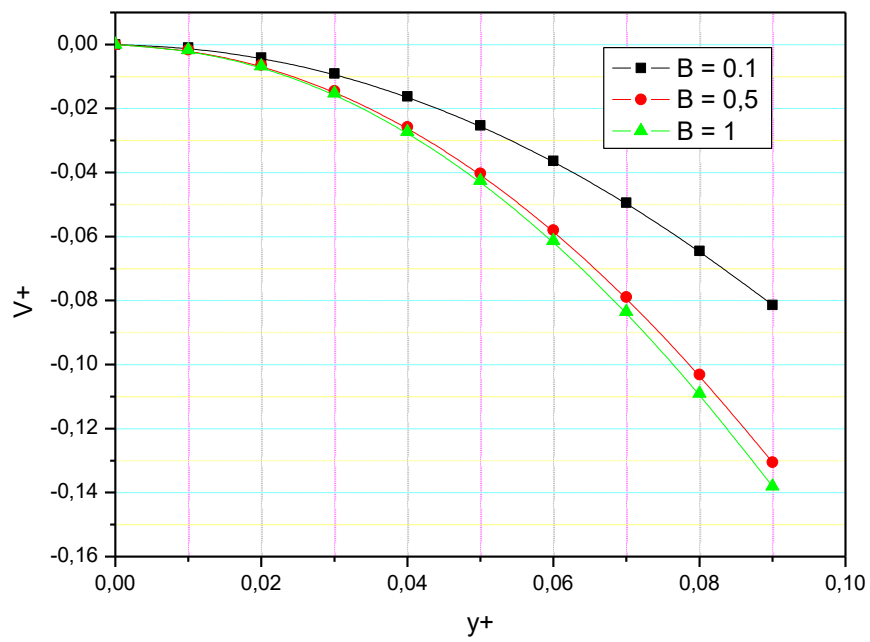


Figure 4.21.1

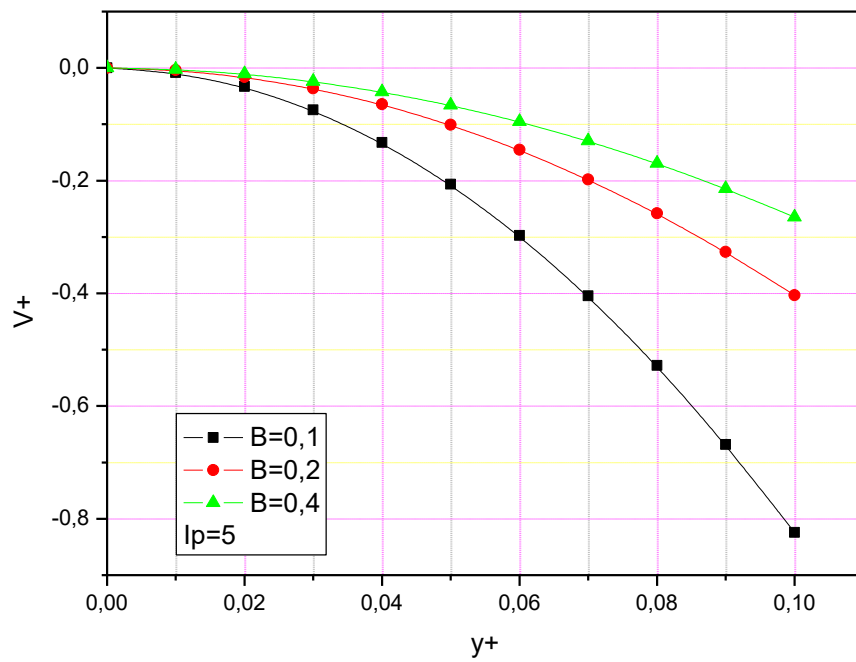


Figure 4.21.2

Figure 4.21: Evolution de la vitesse normale adimensionnelle en fonction de y^+ pour plusieurs valeurs de B .

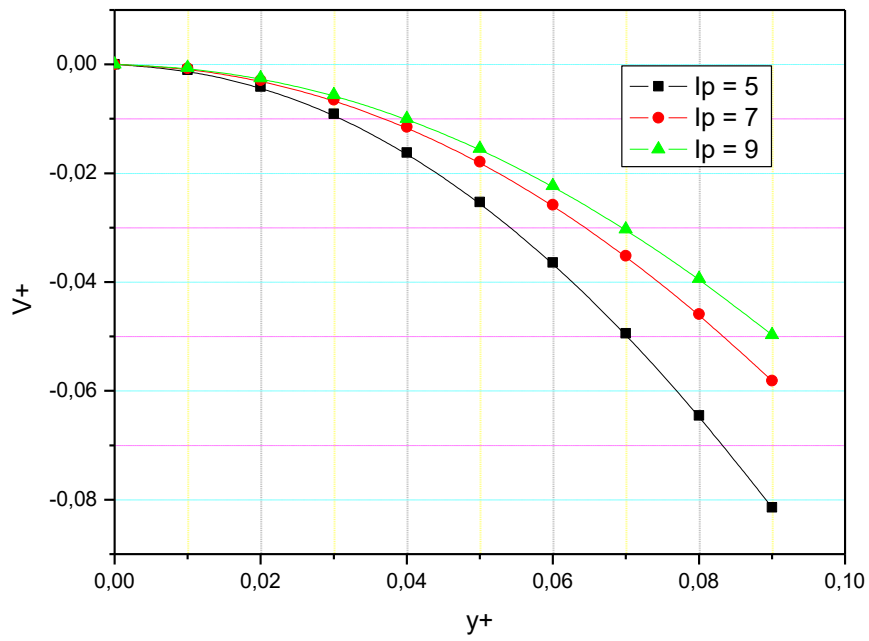


Figure 4.22.1

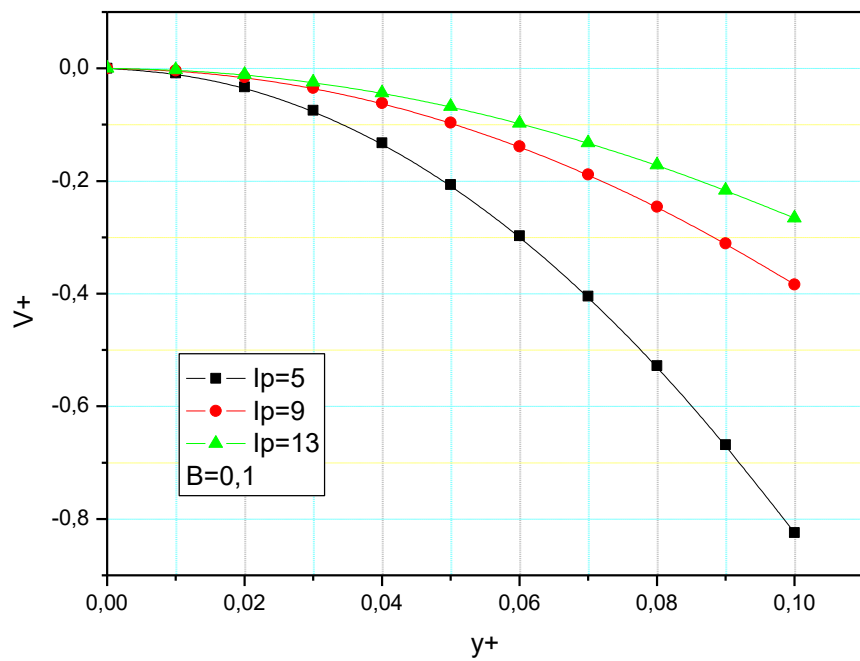


Figure 4.22.2

Figure 4.22 : Evolution de la vitesse normale adimensionnelle en fonction de y_+ pour $\varphi=60^\circ$ et plusieurs valeurs de l_p .

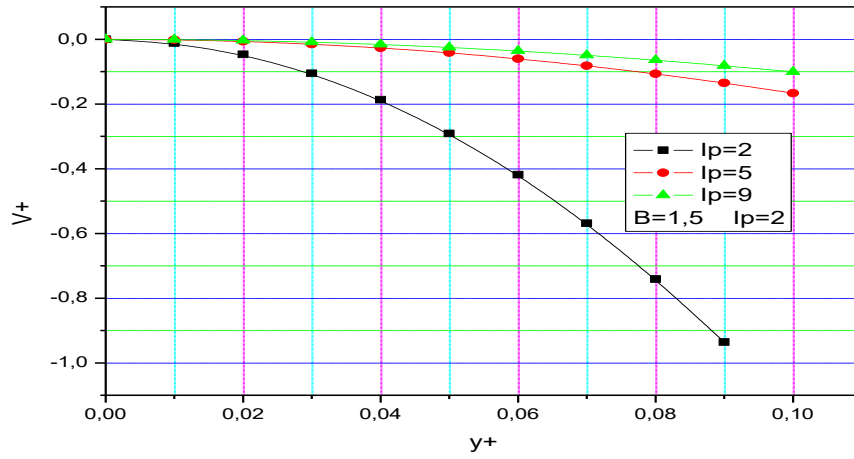


Figure 4.23: Evolution de la vitesse normale adimensionnelle en fonction de y_+ pour $\theta_o = 20^\circ$, $B=1,5$ et plusieurs valeurs de I_p , $\varphi = 60^\circ$

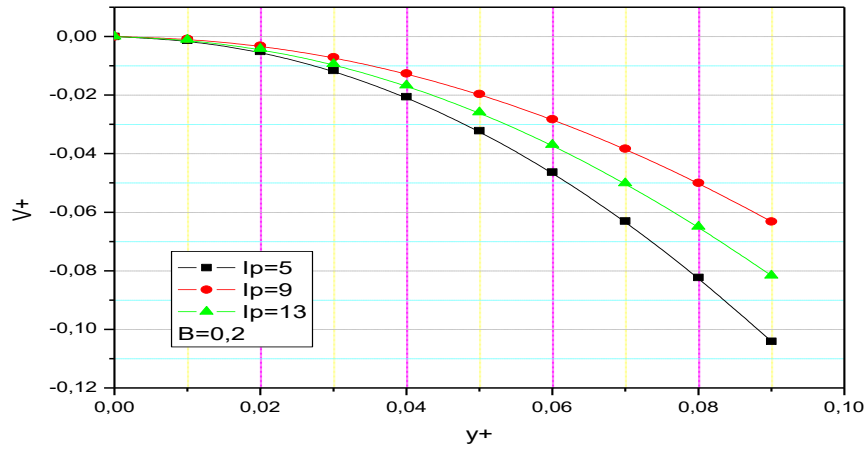


Figure 4.24.1: $\alpha=5^\circ$

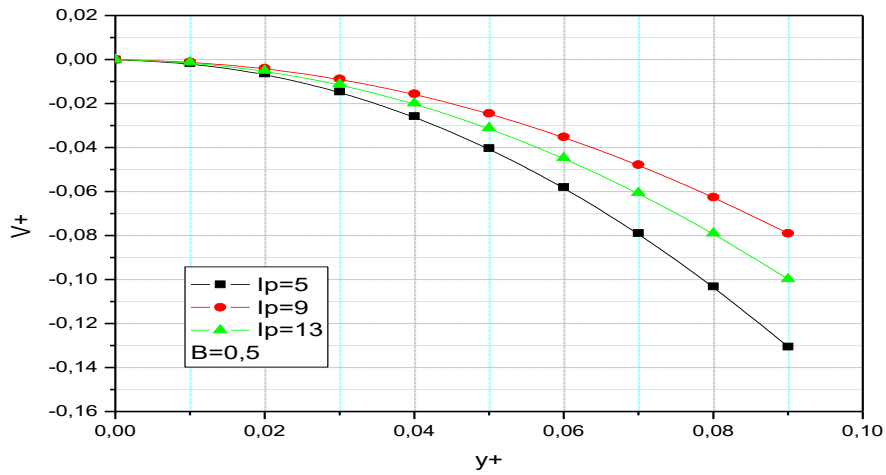


Figure 4.24.2: $\alpha=10^\circ$

Figure 4.24: Evolution de la vitesse normale adimensionnelle en fonction de y_+ pour $\theta_o = 20^\circ$, $\varphi = 60^\circ$ et plusieurs valeurs de I_p .

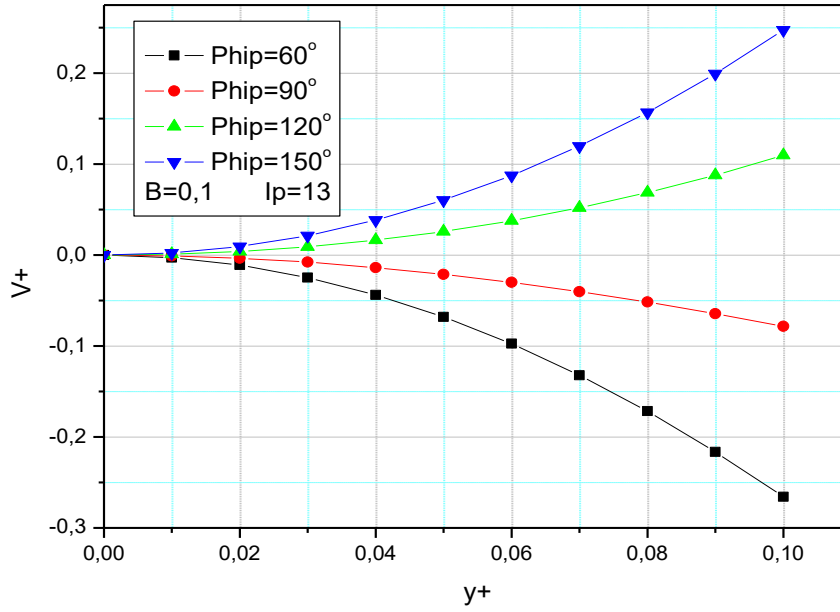


Figure 4.25: Evolution de la vitesse normale adimensionnelle en fonction de y_+ , pour $I_p=13$, $B=0,1$ et pour plusieurs valeurs de ϕ .

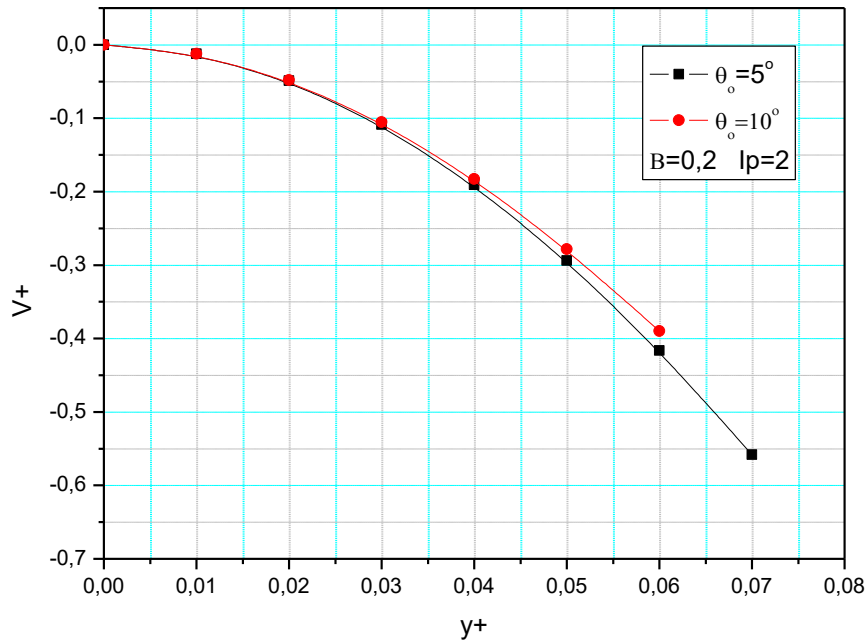


Figure 4.26: Evolution de la vitesse normale adimensionnelle en fonction de y_+ , pour $I_p=2$, $B=0,2$ et pour plusieurs valeurs de l'angle d'ouverture du cône θ° .

Les figures 4.27 à 4.30 nous montrent les variations de la composante normale adimensionnelle V_+ en fonction de coordonnée azimutal adimensionnel ϕ_+ . Cette composante est sinusoïdale sur la surface diamétrale du cône (ses valeurs varient très fortement surtout pour les valeurs de B très faible). Et ce profil de vitesse est symétrique en $\phi = 90^\circ$. On dit qu'il existe des points privilégiés qui sont indépendants de B figure 4. 27, α à la figure 4. 28, θ° à la figure 4.29 et de x_+ pour la prédominance forcée à la figure 4. 30.1.

Pour l'angle d'inclinaison α , le demi-angle d'ouverture θ_0 et l'abscisse curviligne adimensionnelle x_+ fixés et pour plusieurs valeurs de paramètre de rotation B , la diminution de ce dernier fait : augmenter l'ondulation, diminuer la composante normale pour $\varphi_+ < 90^\circ$ et augmenter cette composante dans le cas contraire.

Pour l'abscisse curviligne adimensionnelle x_+ , le demi-angle d'ouverture θ_0 et du paramètre de rotation B fixés et pour plusieurs valeurs de l'angle d'inclinaison α , plus ce dernier est élevé la composante normale est plus faible en intensité pour $\varphi_+ < 90^\circ$ et elle est plus élevée pour $\varphi_+ > 90^\circ$ figures 4.28.1 et 4.28.2.

Et pour l'abscisse curviligne adimensionnelle x_+ , l'angle d'inclinaison α et le paramètre de rotation B fixés et pour plusieurs valeurs de demi-angle d'ouverture θ_0 , plus ce dernier est grand, plus la composante normale est grande en intensité pour $\varphi_+ < 90^\circ$, dans le cas contraire elle devient en plus faible figure 4.29.1 à 4.29.5. Et enfin pour le demi-angle d'ouverture θ_0 , l'angle d'inclinaison α et le paramètre de rotation $B < 1$ fixés et pour plusieurs valeurs de l'abscisse curviligne adimensionnelle x_+ ,

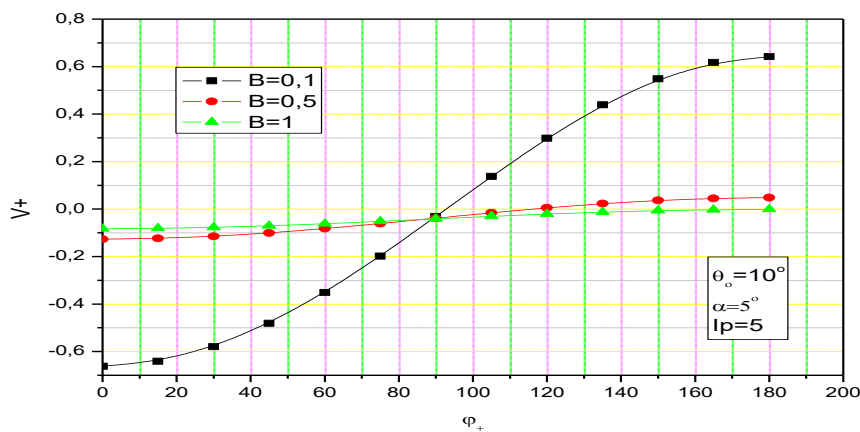


Figure 4.27.1

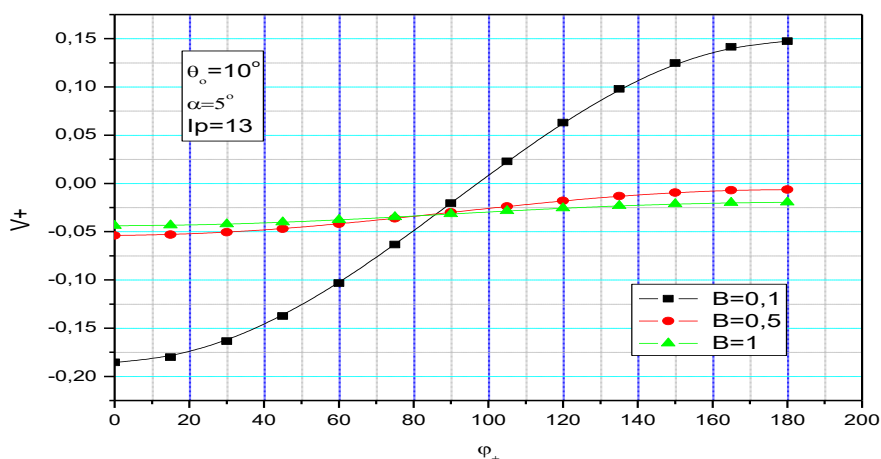


Figure 4.27.2

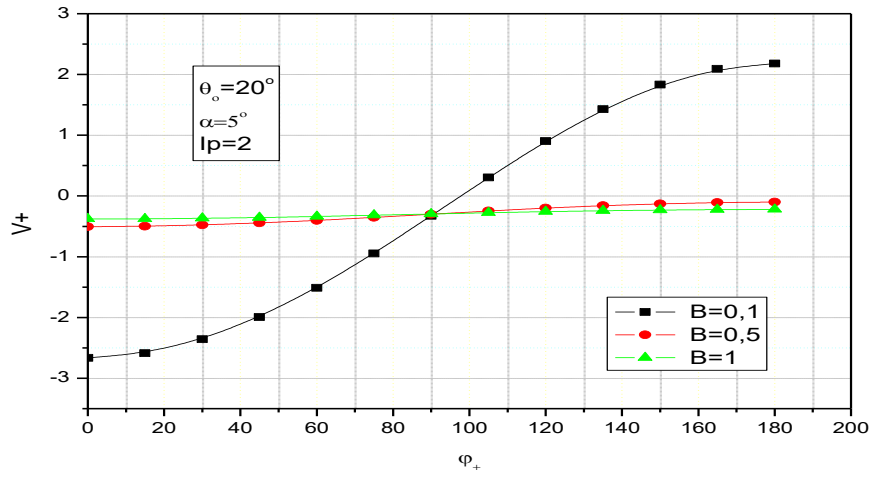


Figure 4.27.3

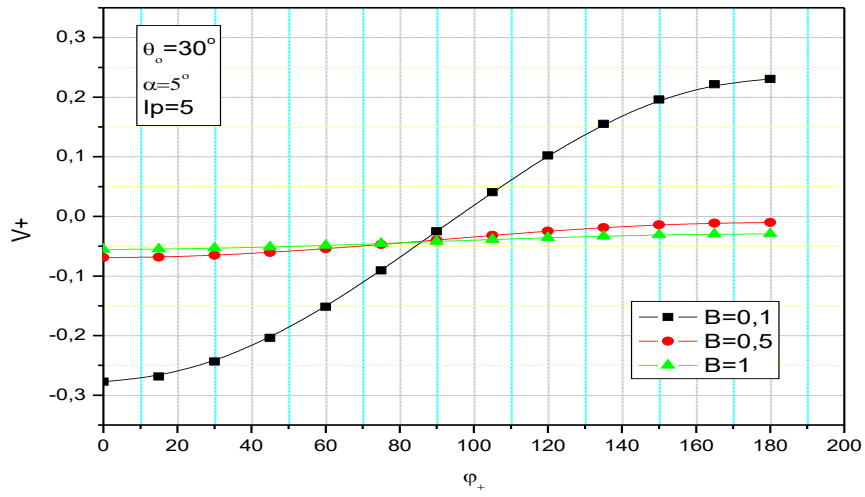


Figure 4.27.4

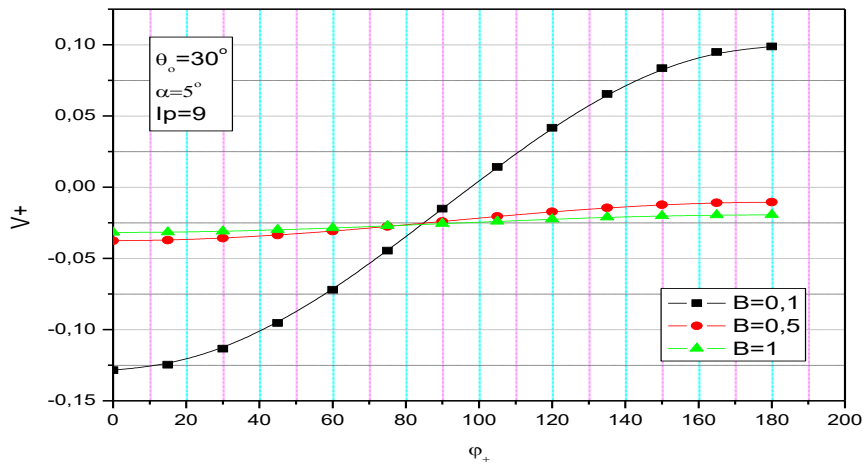


Figure 4.27.5

Figure 4.27 : Evolution de la vitesse normale adimensionnelle en fonction de φ_+ , pour plusieurs valeurs de paramètre de rotation B

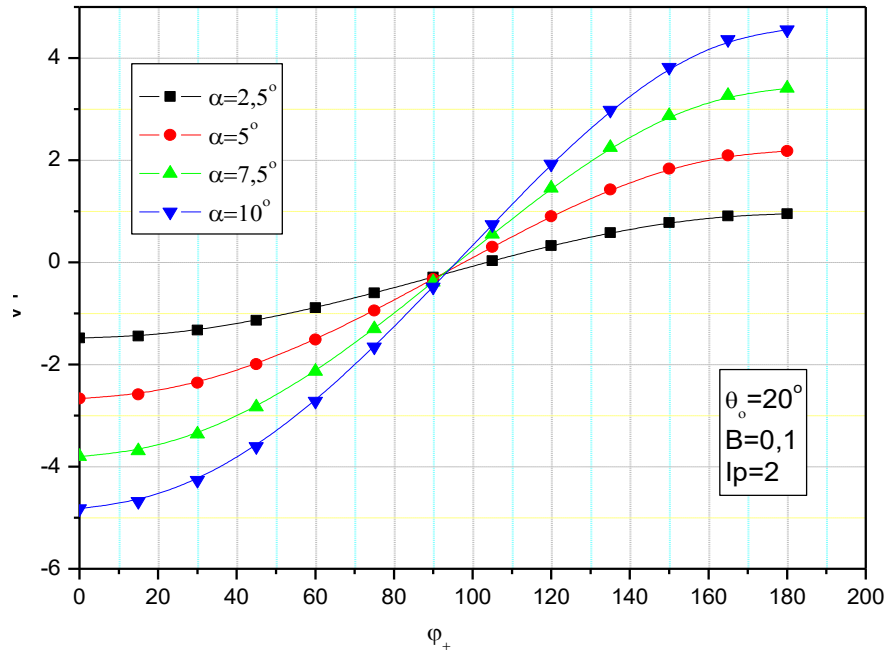


Figure 4.28.1

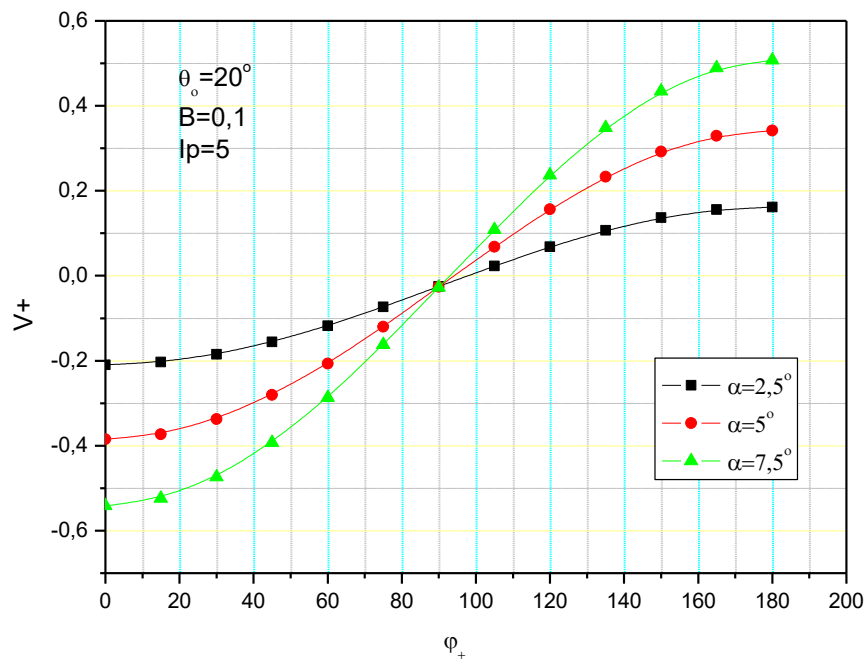


Figure 4.28.2

Figure 4.28: Evolution de la vitesse normale adimensionnelle en fonction de φ_+ , pour plusieurs valeurs de l'angle d'inclinaison α

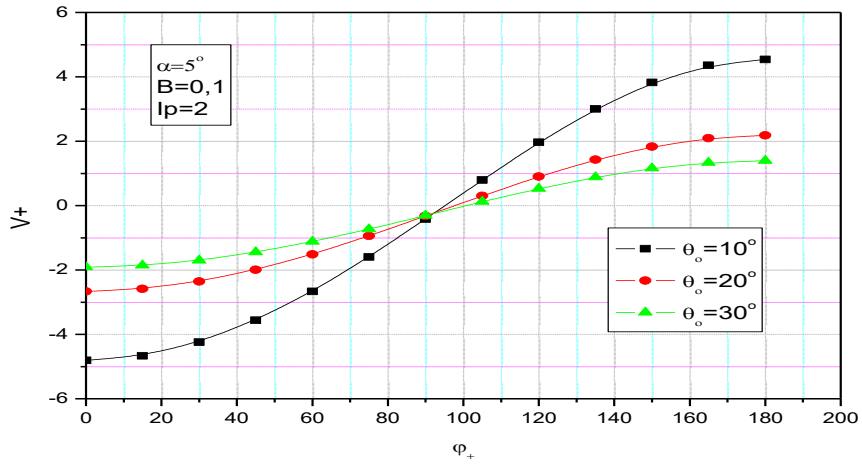


Figure 4.29.1

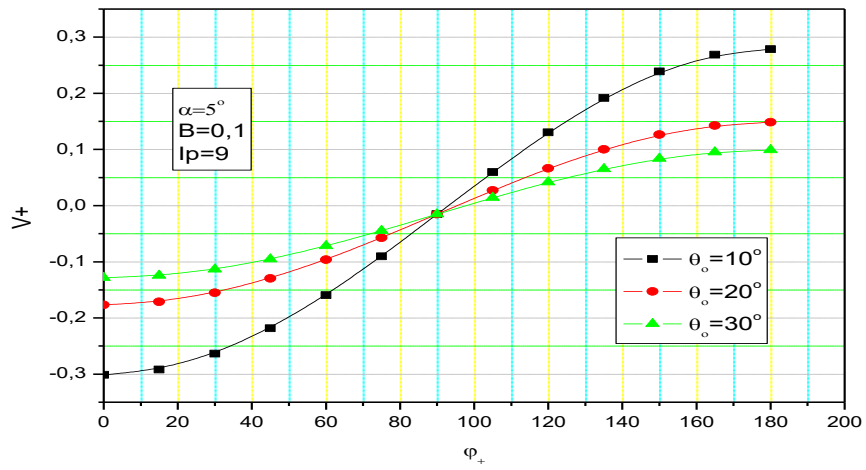


Figure 4.29.2

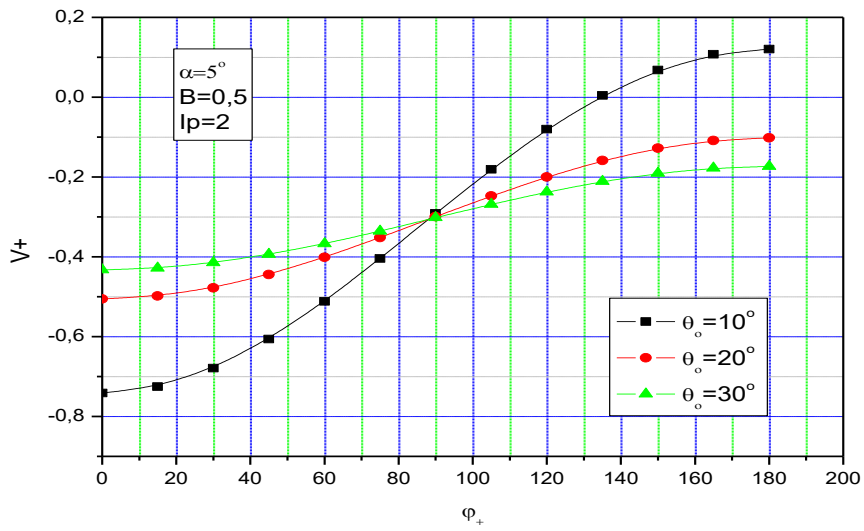


Figure 4.29.3

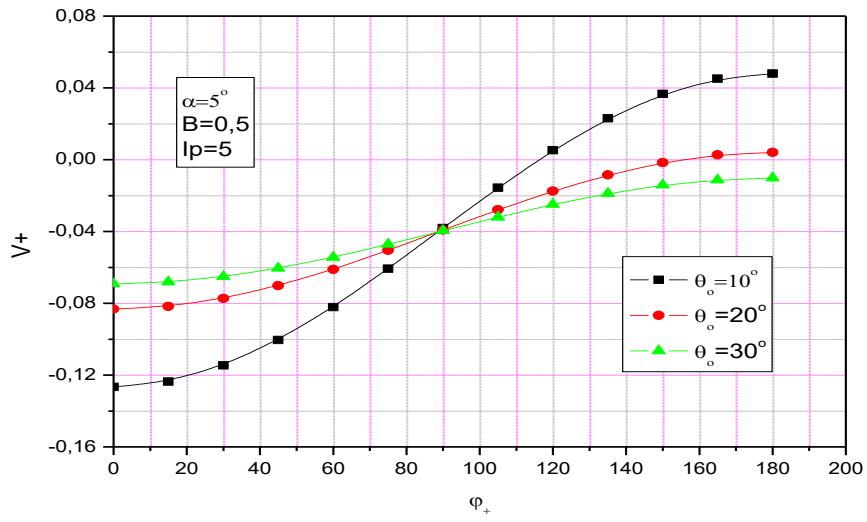


Figure 4.29.4

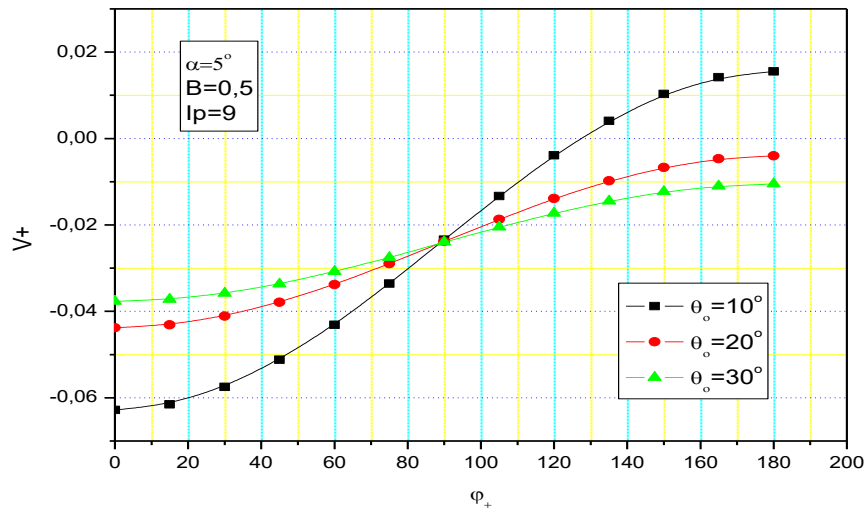


Figure 4.29.5

Figure 4.29: Evolution de la vitesse normale adimensionnelle en fonction de φ_+ , pour plusieurs valeurs de l'angle d'ouverture θ_o

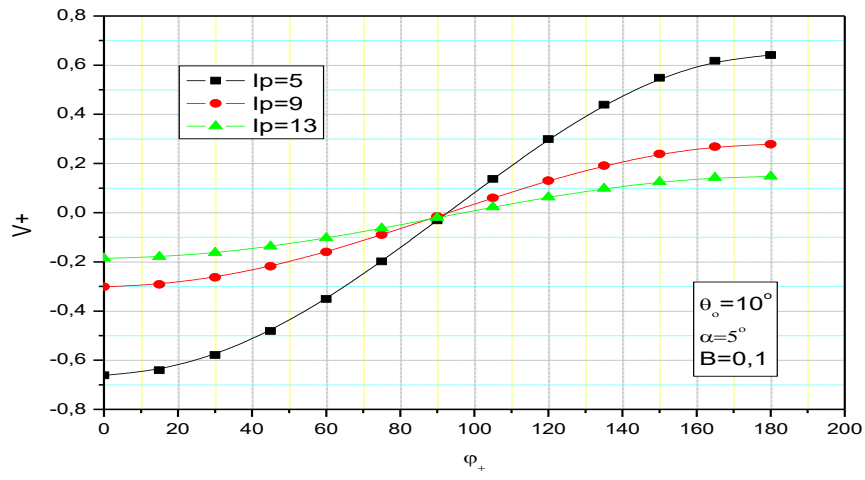


Figure 4.30.1

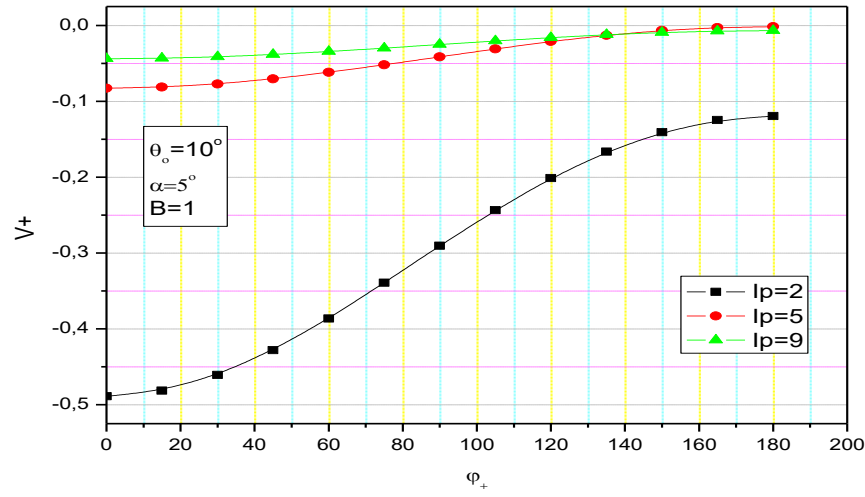


Figure 4.30.2

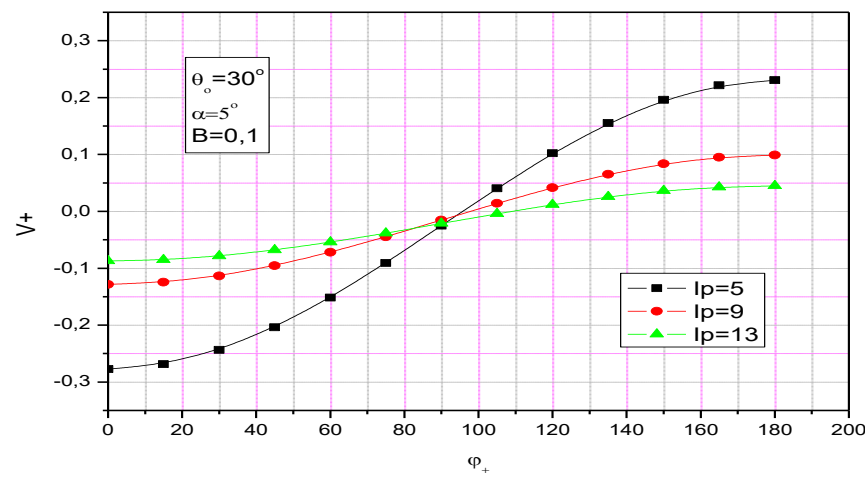


Figure 4.30.3

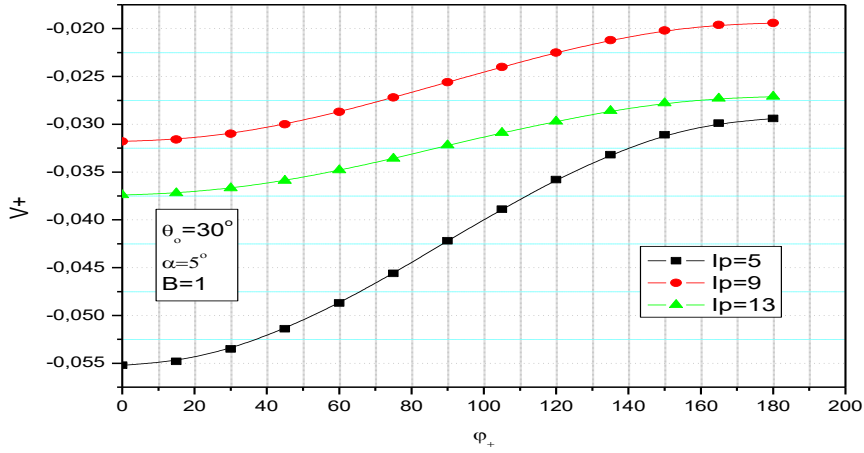


Figure 4.30.4

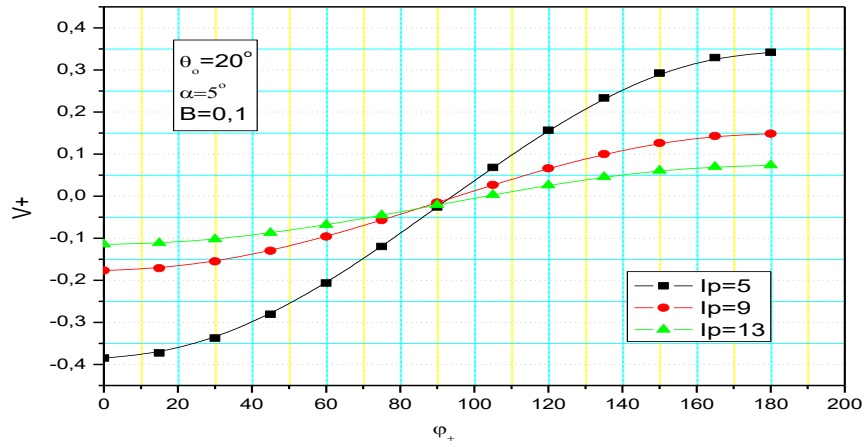


Figure 4.30.5

Figure 4.30: Evolution de la vitesse normale adimensionnelle en fonction de ϕ_+ , pour plusieurs valeurs de I_p

1.3.3 Température adimensionnelle T_+

Les figures 4.32 à 4.37 illustrant les variations de la température adimensionnelle T_+ en fonction de y_+ . Sa valeur est maximale à la paroi et diminue suivant y_+ pour atteindre la valeur nulle à la frontière de la couche limite. Pour l'angle d'inclinaison α , le demi-angle d'ouverture θ_0 et x_+ fixés et pour plusieurs valeurs du paramètre de rotation B , les figures 4.32.1- 4.32.3 nous montrent que plus la vitesse de rotation est grande c'est-à-dire le paramètre de rotation grand ou le rayon du cône plus grand, moins la température adimensionnelle diminue dans la couche limite. Et pour l'angle d'inclinaison α , le paramètre de rotation B et x_+ fixés et pour plusieurs valeurs le demi-angle d'ouverture θ_0 , la figure 4.33 nous montre que plus ce dernier est élevé, moins la température adimensionnelle diminue dans la couche limite. Ainsi pour l'angle d'inclinaison α , le demi-angle d'ouverture θ_0 et le paramètre de rotation B fixés et pour plusieurs valeurs x_+ , les figures 4.34 - 4.36 nous montrent que lorsque cette dernière est petit ou proche du point d'arrêt, la diminution de la température adimensionnelle est plus élevée. Et enfin lorsque x_+ est élevée ou quand on écart le point d'arrêt, la température diminue moins et va atteindre la valeur nulle.

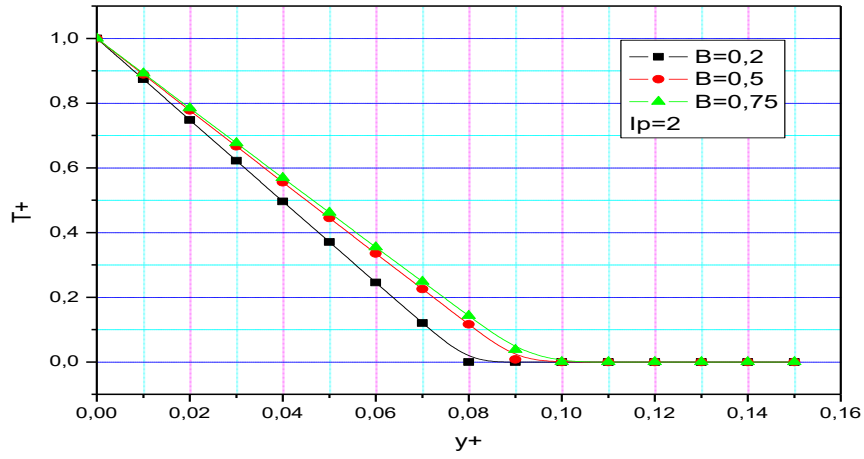


Figure 4.31.1: $\theta_o = 5^\circ$, $\alpha = 10^\circ$, $\varphi = 60^\circ$

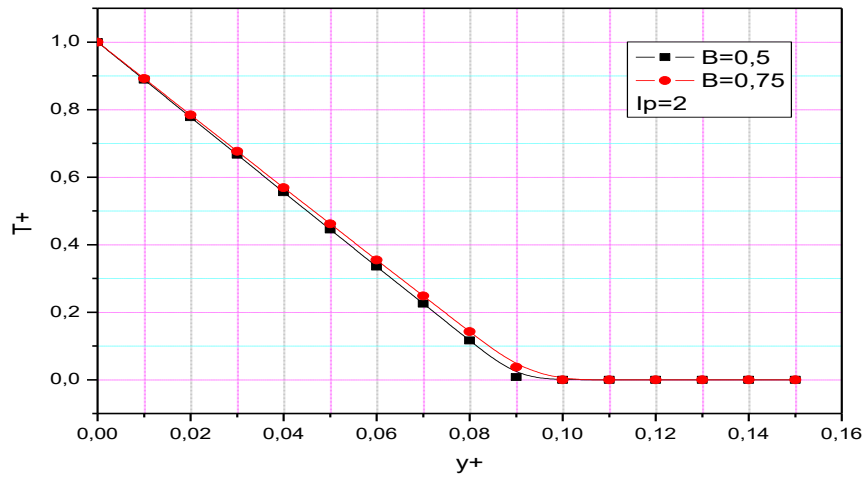


Figure 4.31.2 : $\theta_o = 10^\circ$, $\alpha = 10^\circ$

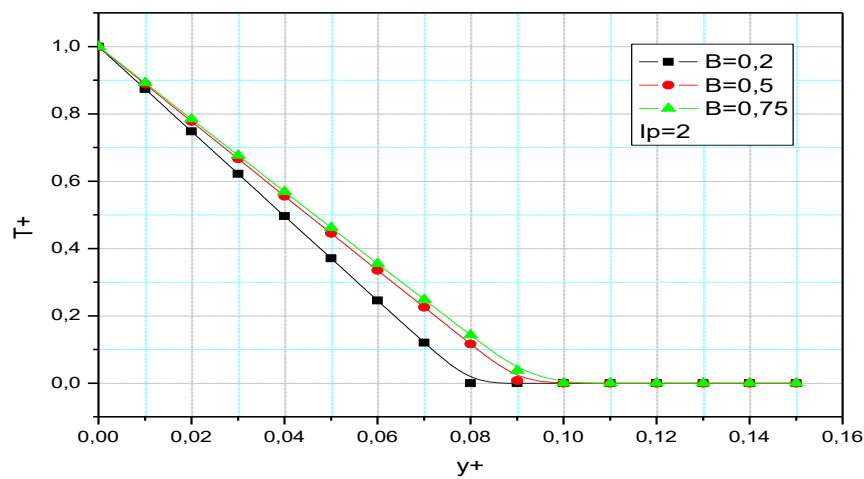


Figure 4.31.3 : $\theta_o = 20^\circ$, $\alpha = 10^\circ$

Figure 4.31: Evolution de la température adimensionnelle T^+ en fonction de y_+ pour plusieurs valeurs de B .

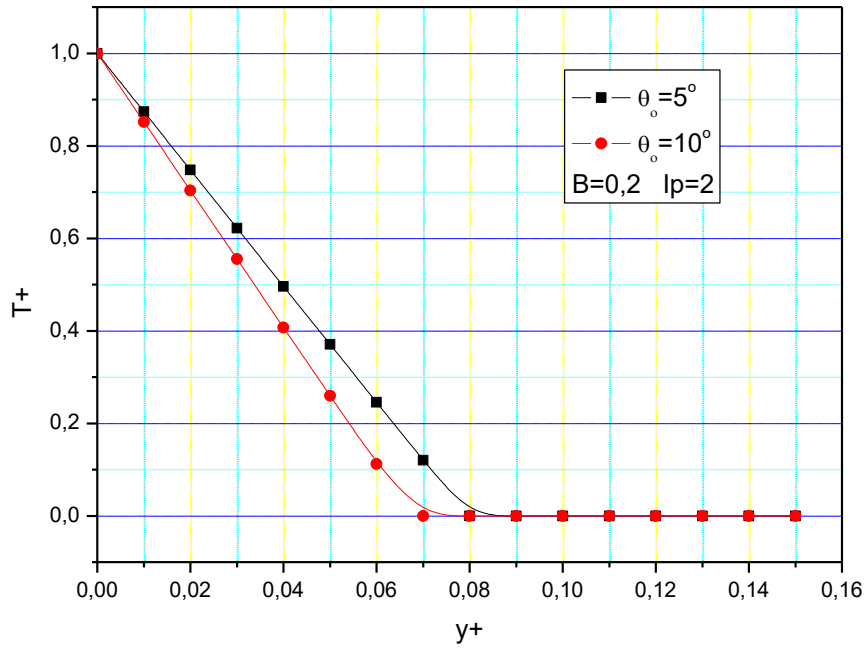


Figure 4.32 : Evolution de la vitesse méridienne adimensionnelle en fonction de y_+ pour $\varphi = 60^\circ$, $\alpha = 10^\circ$ et plusieurs valeurs de l'angle d'ouverture θ° .

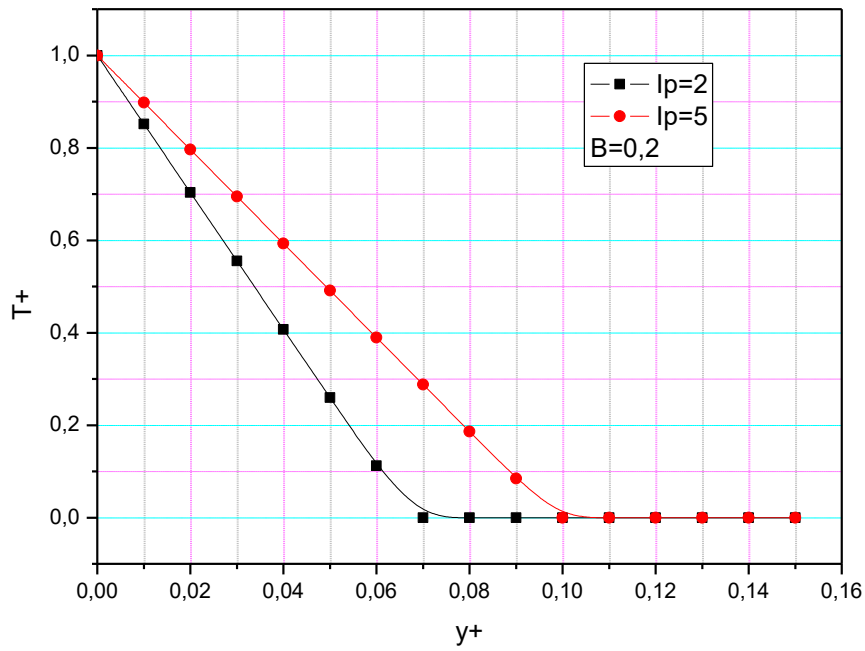


Figure 4.33: Evolution de la température adimensionnelle T^+ en fonction de y_+ pour $\theta_o = 10^\circ$, $\alpha = 10^\circ$, $\varphi = 60^\circ$ et plusieurs valeurs de I_p .

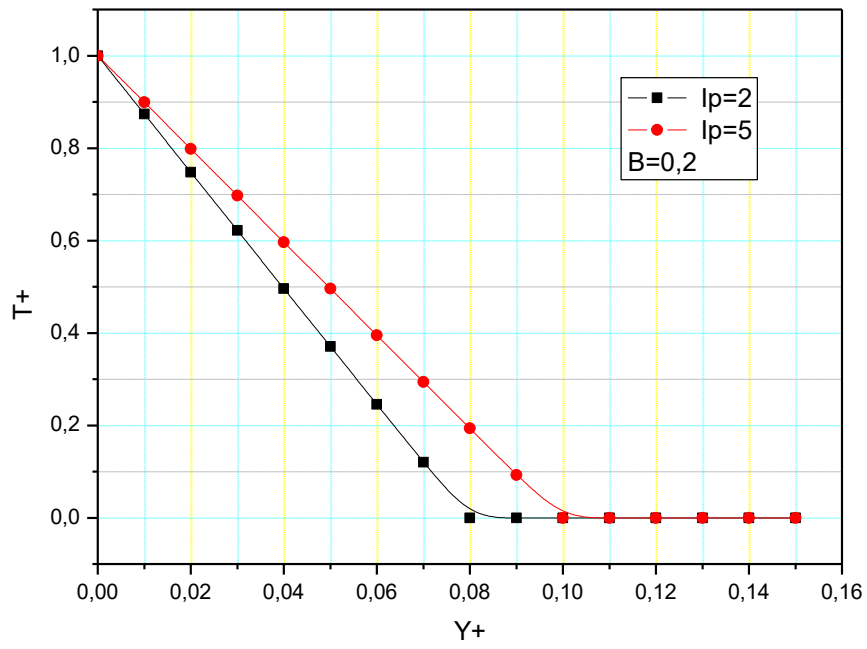


Figure 4.34.1

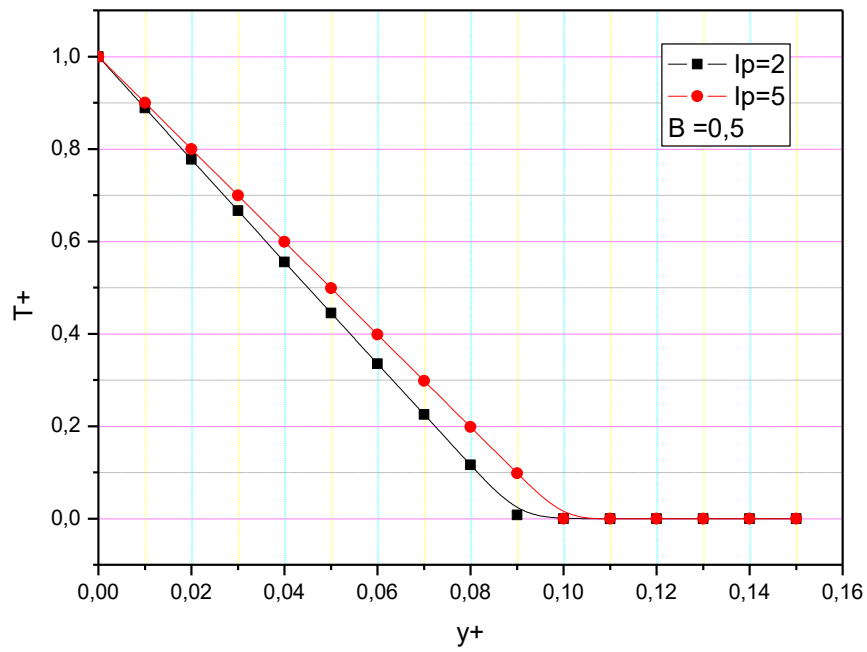


Figure 4.34.2

Figure 4.34: Evolution de la température adimensionnelle T^+ en fonction de y_+ pour $\theta_o = 20^\circ$, $\alpha=10^\circ$, $\varphi = 60^\circ$ et plusieurs valeurs de lp .

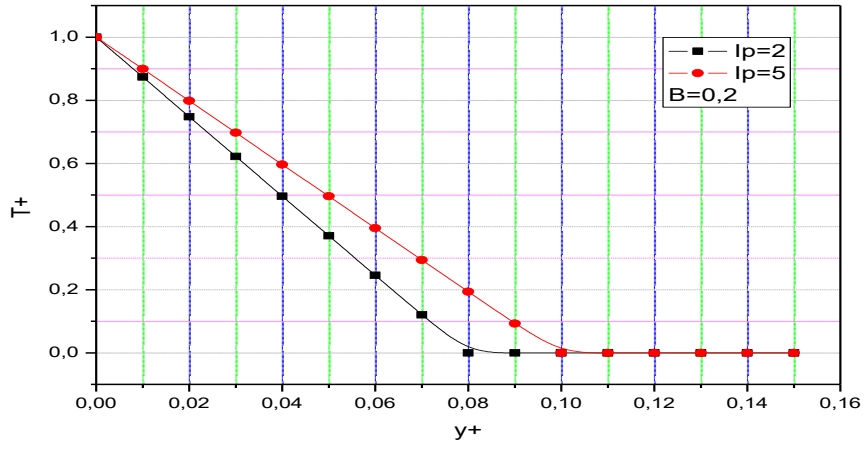


Figure 4.35.1

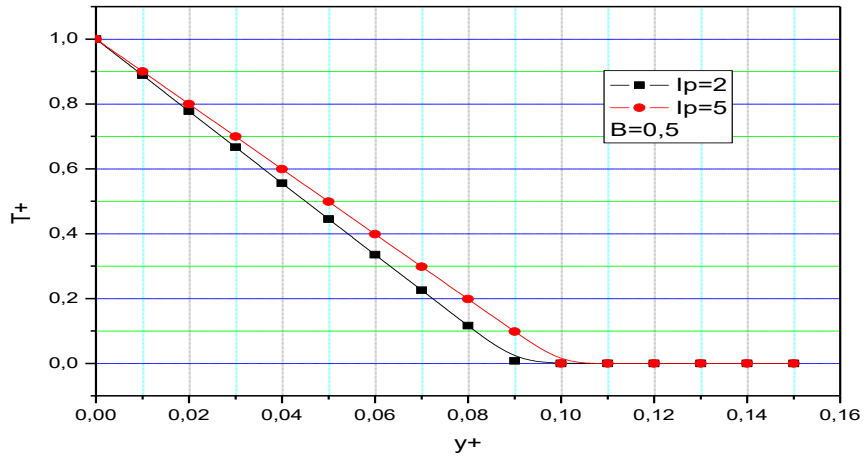


Figure 4.35.2

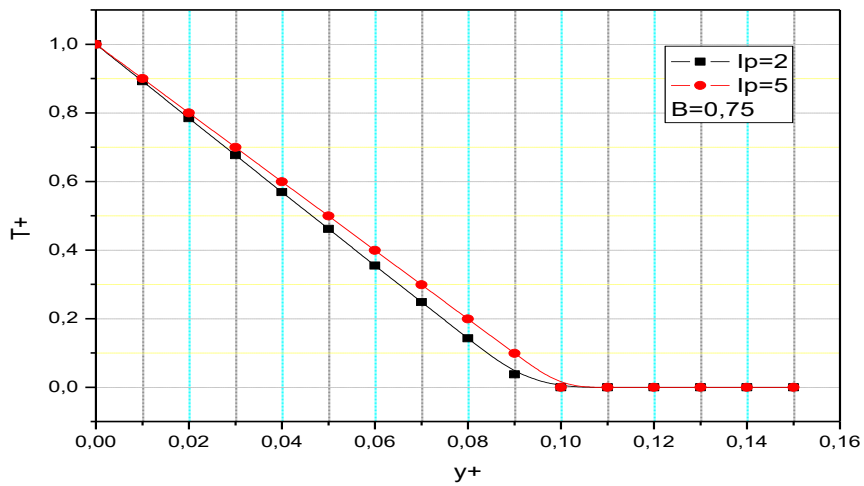


Figure 4.35.3

Figure 4.35: Evolution de la température adimensionnelle T^+ en fonction de y_+ pour $\theta_o = 5^\circ$, $\alpha = 10^\circ$, $\varphi = 60^\circ$ et plusieurs valeurs de I_p .

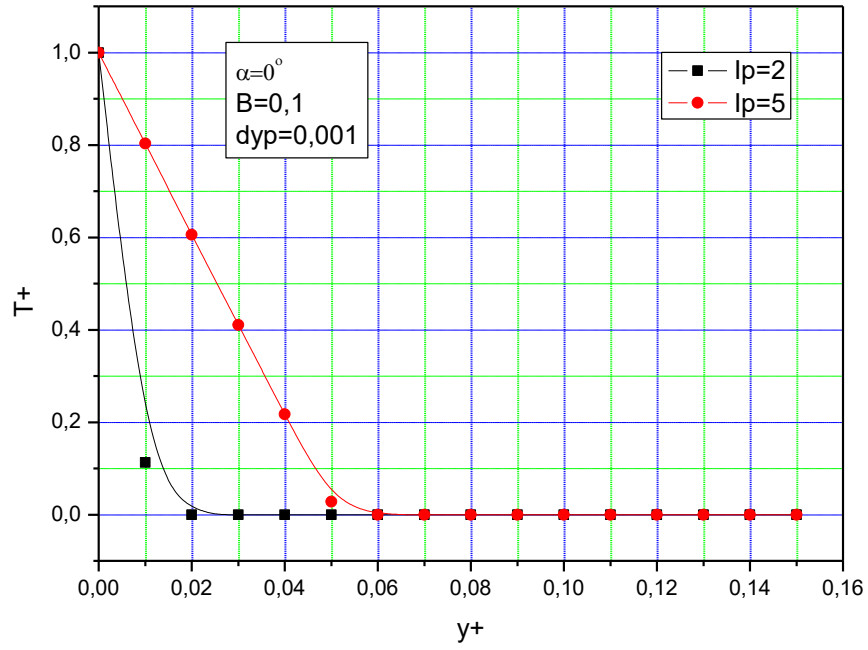


Figure 4.36.1

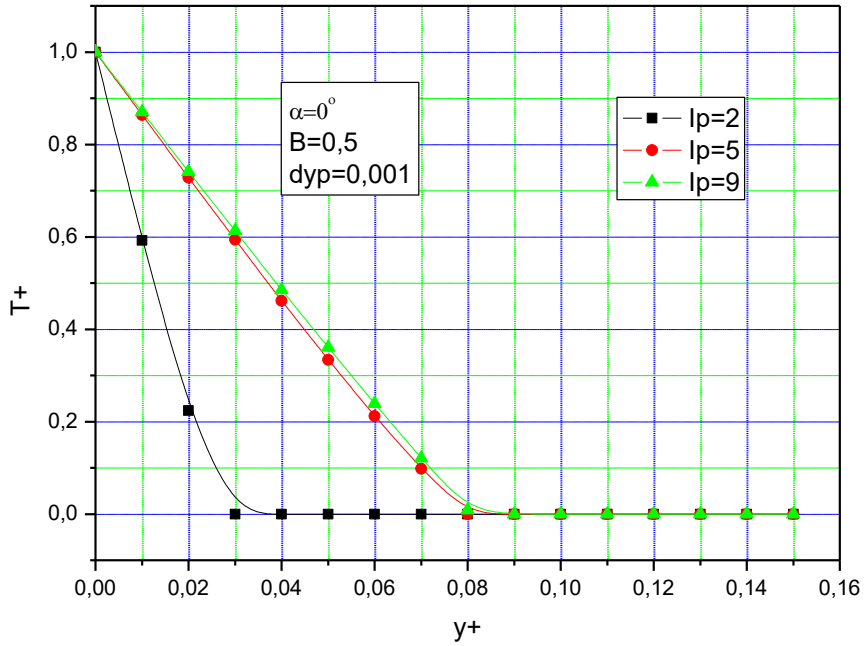


Figure 4.36.2

Figure 4.36: Evolution de la température adimensionnelle T^+ en fonction de y^+ pour $\phi = 60^\circ$ et plusieurs valeurs de lp .

Les figures 4.37 à 4.40 illustrant les variations de la température adimensionnelle T^+ en fonction de ϕ . La variation de température est sinusoïdale suivant ϕ . Les figures 4.37.2, 4.38.1,

4.38.2, 4.39.1, 4.39.3 et la figure 4.40 nous montrent que proche du point d'arrêt l'ondulation est très intense.

Pour l'angle d'inclinaison, le demi angle d'ouverture et x_+ fixés et pour plusieurs valeurs de paramètre de rotation B ou en autre terme la vitesse de rotation, proche du point d'arrêt quand ce dernier est plus grand, la température adimensionnelle est plus grande en intensité et l'ondulation est presque nulle, ceci est montré par les figures 4.37.1 à 4.37.2. Par contre les figures 4.37.3 à 4.37.6 nous montrent que loin du point d'arrêt lorsque le paramètre de rotation B est plus grand, la température adimensionnelle est plus faible en intensité.

Les figures 4.38.1 et 4.38.2 nous montrent que pour le demi-angle d'ouverture, le paramètre rotation B et x_+ fixés et pour plusieurs valeurs d'angles d'inclinaison α , lorsque ce dernier est plus grand, l'ondulation est plus vive et la température adimensionnelle est plus est plus grande a en intensité.

Et les figures de la figure 4. 39 nous montrent que pour l'angle d'inclinaison α , le paramètre de rotation B et x_+ fixés et pour plusieurs valeurs de demi angle d'ouverture θ_0 , lorsque ce dernier est plus grand, la température est plus faible en intensité sur la paroi. Proche du point d'arrêt, l'ondulation est intense que nous montre la figure 4.40.1 et par contre loin du point d'arrêt, l'ondulation est presque nulle montrée par les figures 4.39.2, 4.39.4, 4.39.5.

La figure 4.40 montre que pour l'angle d'inclinaison α , le demi-angle d'ouverture θ_0 et le paramètre de rotation B fixés et pour plusieurs valeurs de x_+ , la variation de la température adimensionnelle sur la paroi est symétrique en $\varphi=90^\circ$. on dit qu'il y existe un point privilégié en ce point et ne dépend pas de l'abscisse curviligne adimensionnelle x_+ .

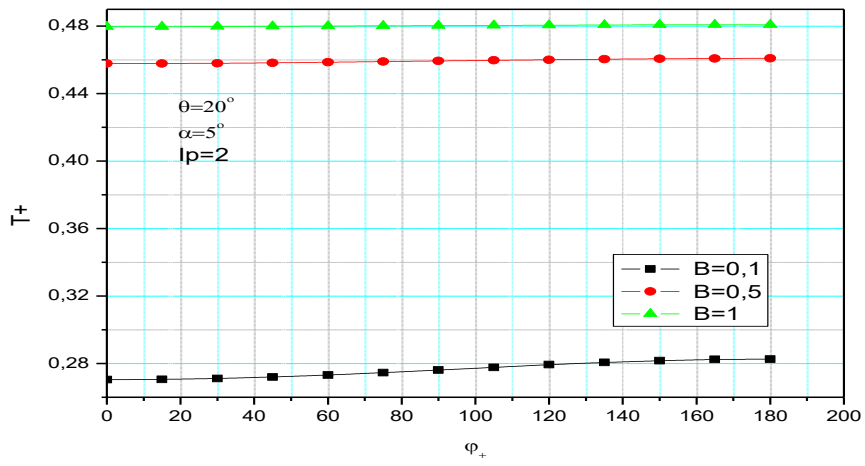


Figure 4.37.1

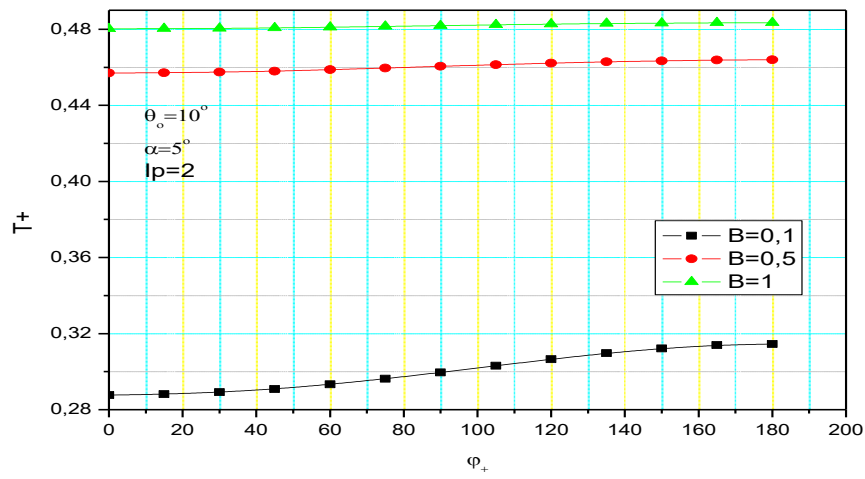


Figure 4.37.2

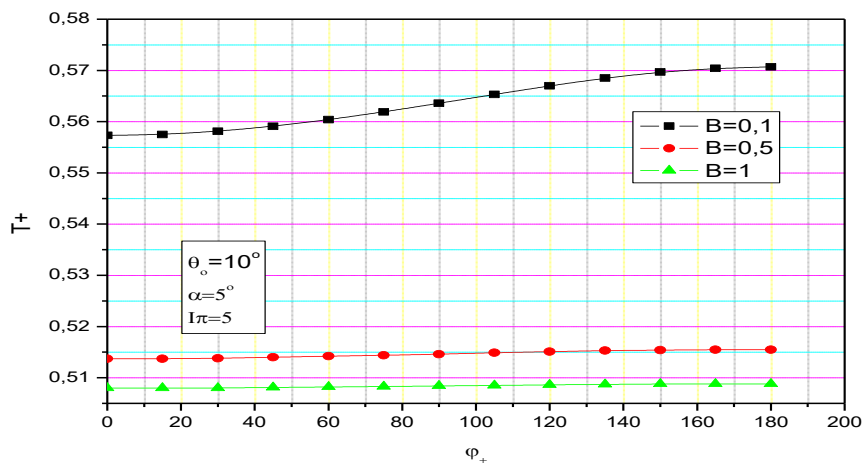


Figure 4.37.3

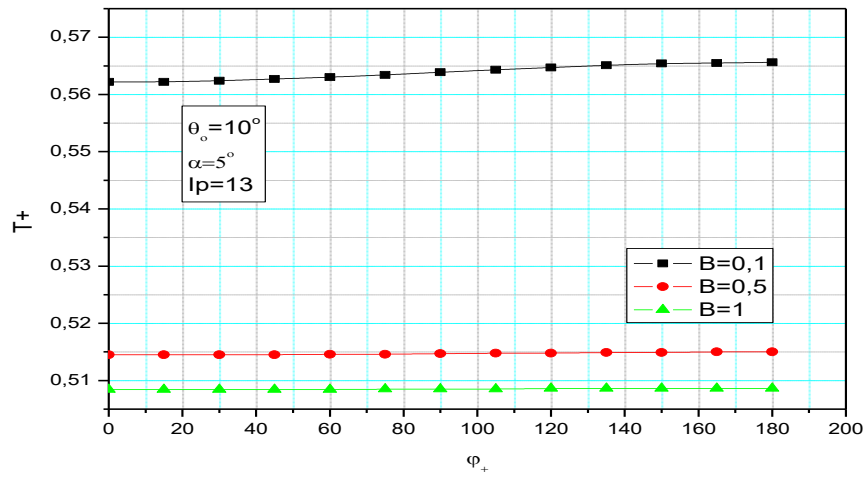


Figure 4.37.4

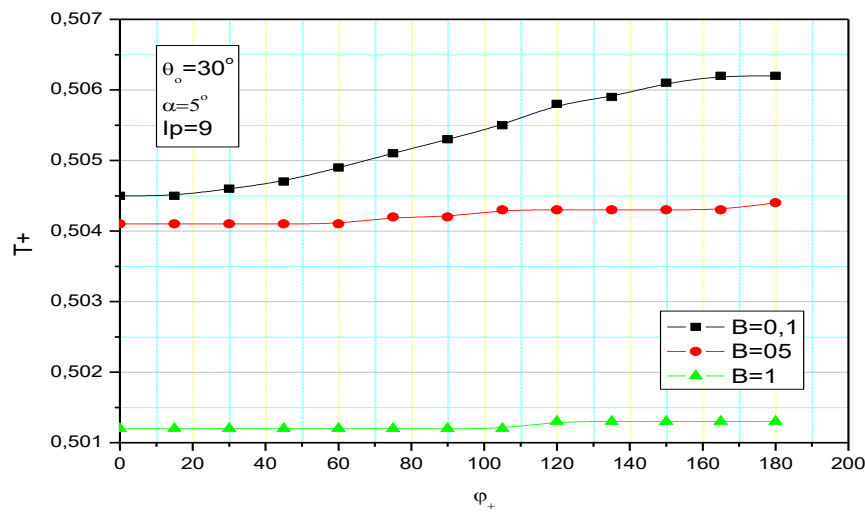


Figure 4.37.5

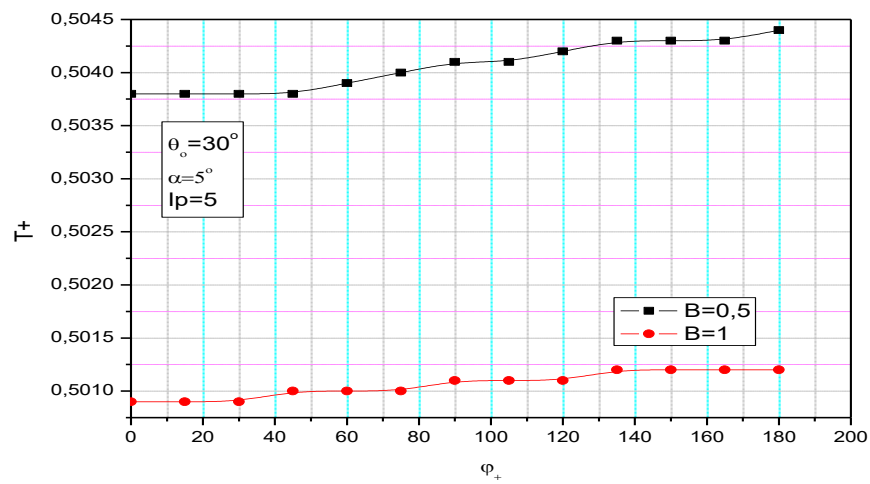


Figure 4.37.6

Figure 4.37: Evolution de la température adimensionnelle en fonction de φ_+ , pour plusieurs valeurs de paramètre de rotation B

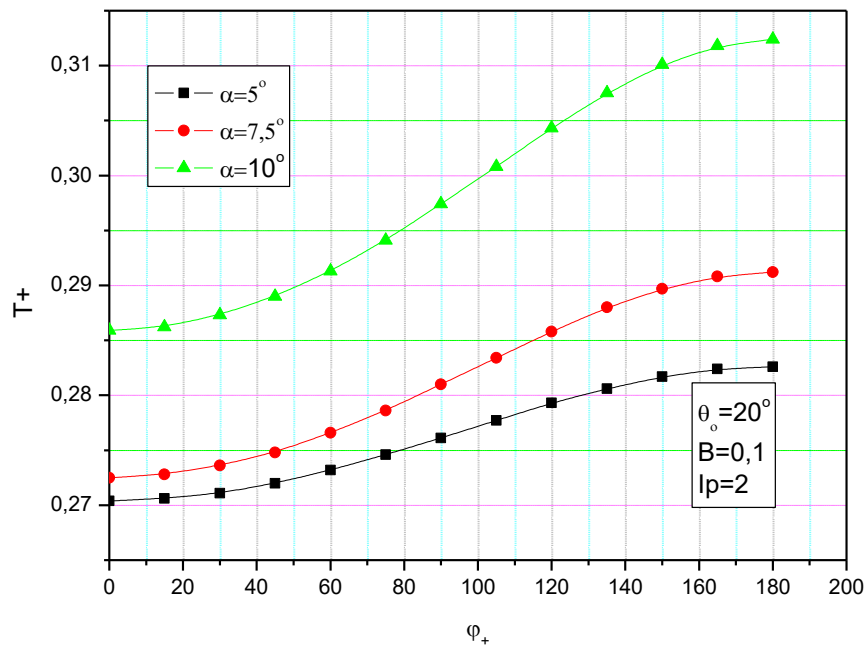


Figure 4.38.1

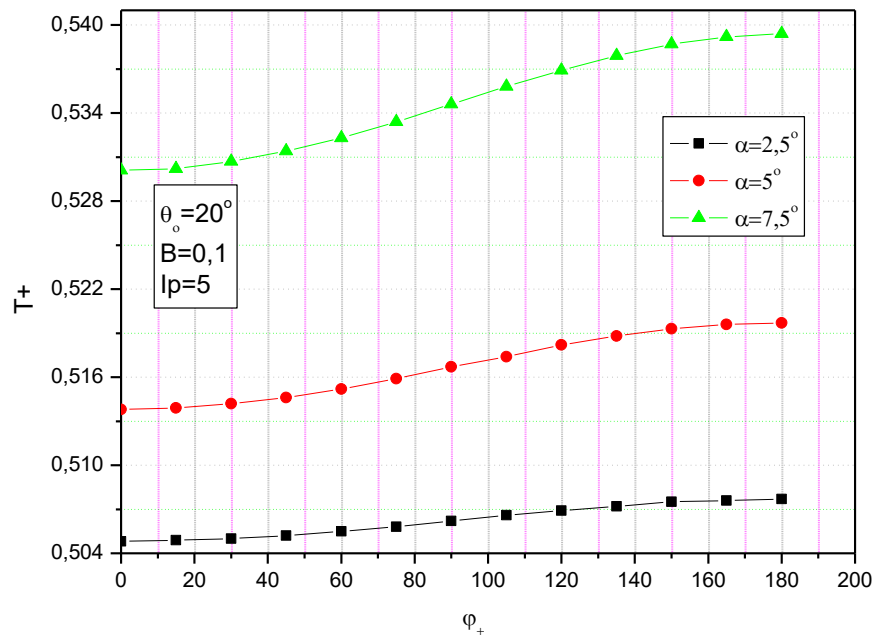


Figure 4.38.2

Figure 4.38: Evolution de la température adimensionnelle en fonction de φ_+ , pour plusieurs valeurs de l'angle d'inclinaison α

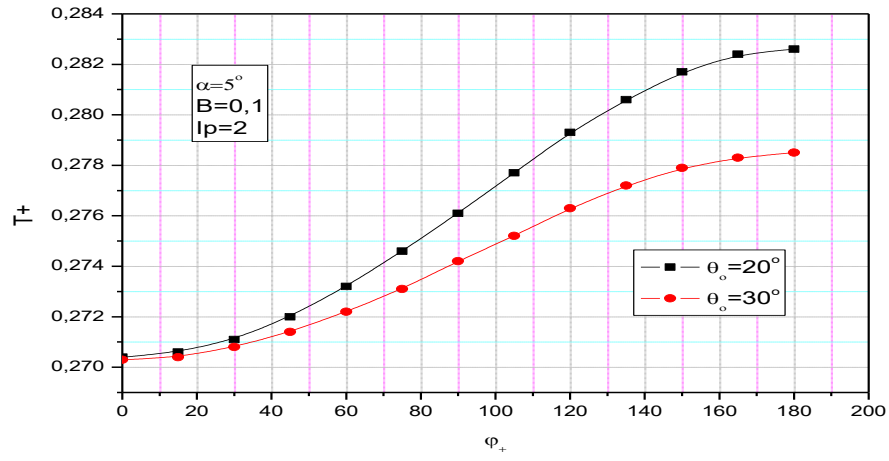


Figure 4.39.1

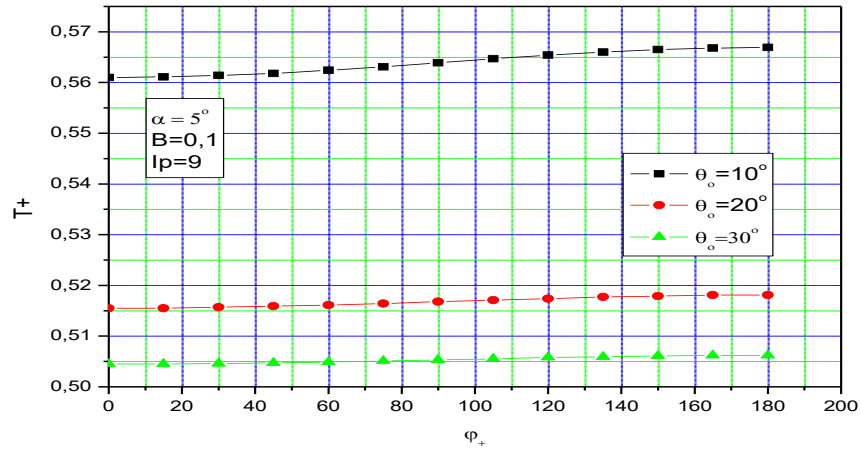


Figure 4.39.2

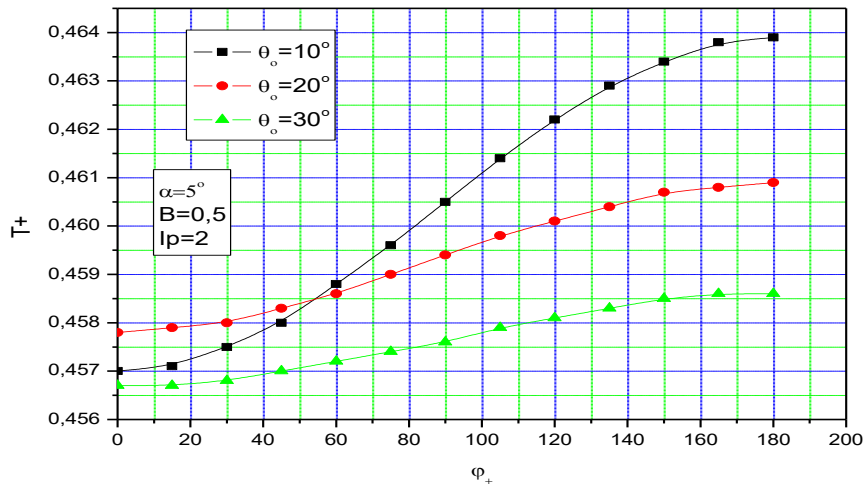


Figure 4.39.3

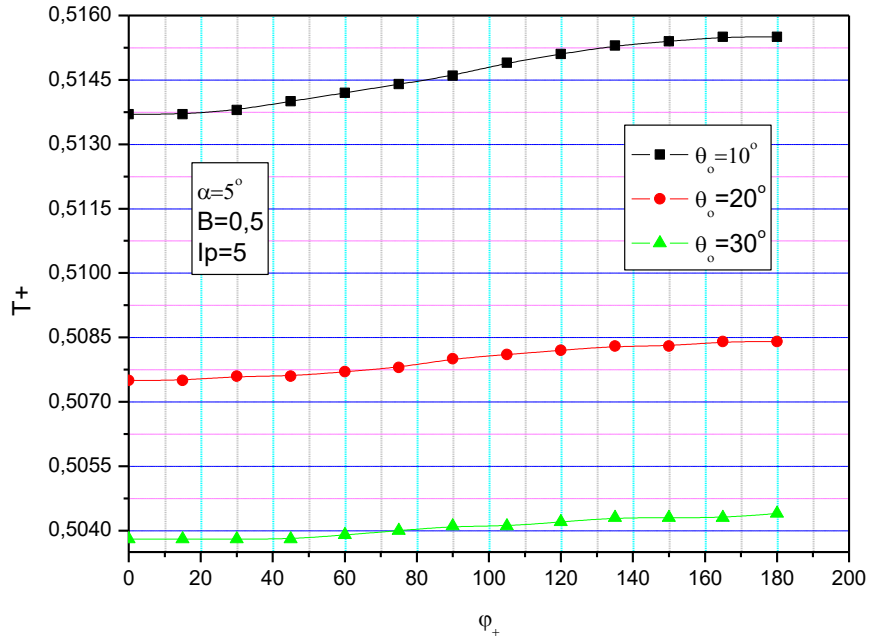


Figure 4.39.4

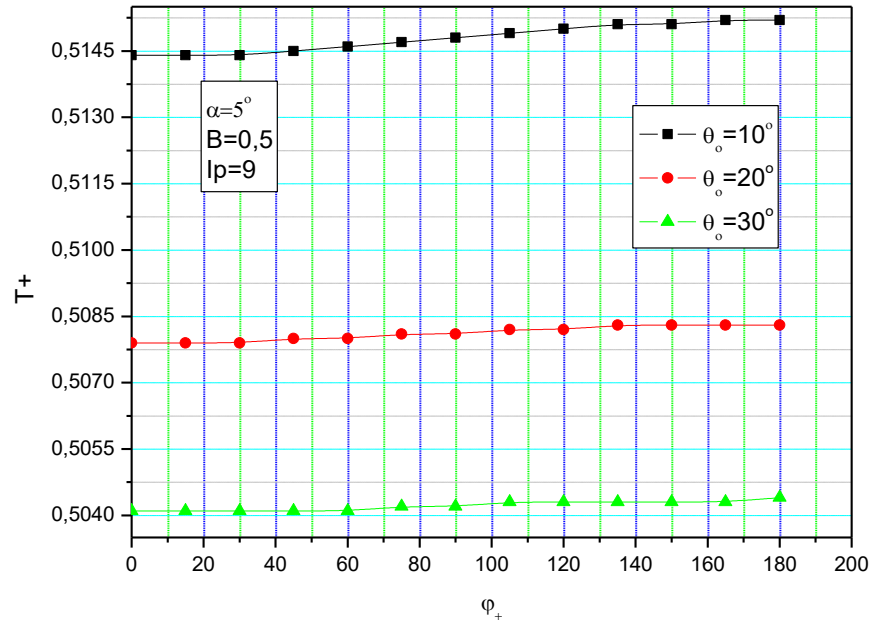


Figure 4.39.5

Figure 4.39: Evolution de la température adimensionnelle en fonction de φ_+ , pour plusieurs valeurs de l'angle d'ouverture θ_o

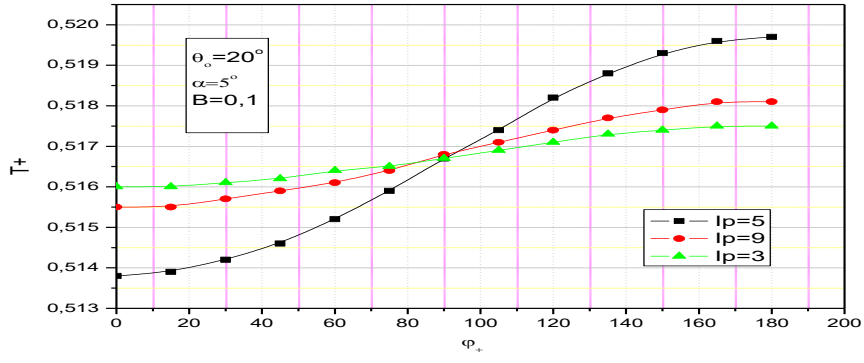


Figure 4.40.1

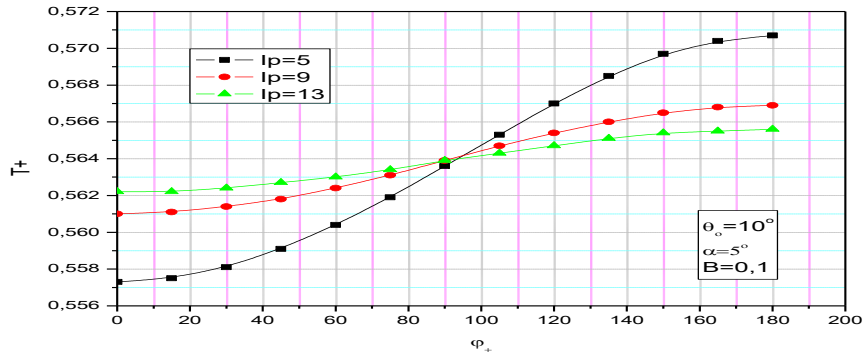


Figure 4.40.2

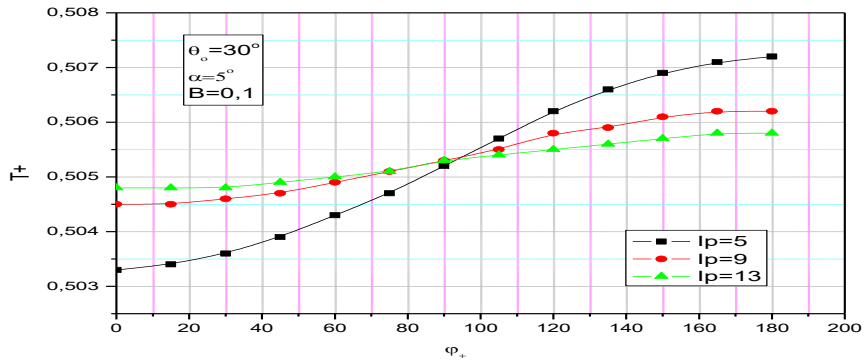


Figure 4.40.3

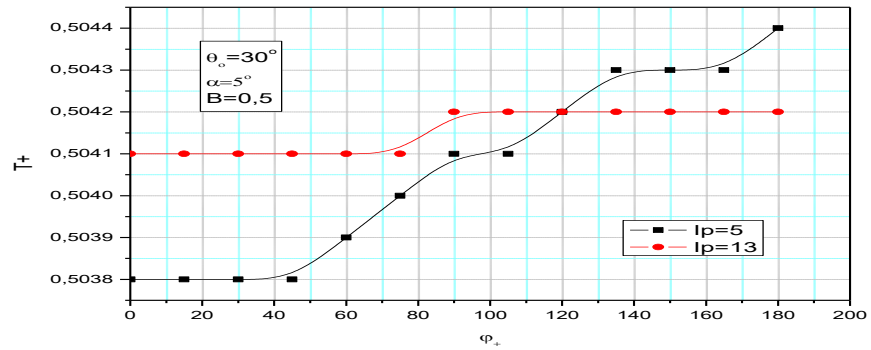


Figure 4.40.4

Figure 4.40: Evolution de la température adimensionnelle en fonction de ϕ^+ , pour plusieurs valeurs de Ip

4.1.3.4 Nombre de Nusselt Nu

Les figures 4.41 à 4.42 illustrent les variations du nombre de Nusselt local en fonction de x_+ . Les résultats montrent que l'échange thermique entre la paroi et le fluide se réalise de manière pratiquement uniforme le long de la surface du cône, à l'exception du point d'arrêt où la vitesse de rotation est nulle, l'échange est élevé et le nombre de nusselt décroît rapidement par la perturbation de rotation du cône. Le long du cône sa valeur est constante sauf au point d'arrêt elle prend la valeur un peu élevée. Pour l'angle d'inclinaison α , le demi-angle d'ouverture θ_0 et le nombre d'Eckert Ec fixés et pour plusieurs de B , les figures 4.41.1 à 4.41.2 nous montrent que lorsque ce dernier est plus grand, le nombre de Nusselt est plus grand en intensité. Et ça implique que dans ce cas l'échange entre la paroi et le fluide est intense.

La figure 4.42 nous montre que pour l'angle d'inclinaison α , le demi-angle d'ouverture θ_0 et nombre d'Eckert Ec fixés et pour plusieurs de φ_+ , le long du cône sur la circonférence leurs valeurs sont indifférentes.

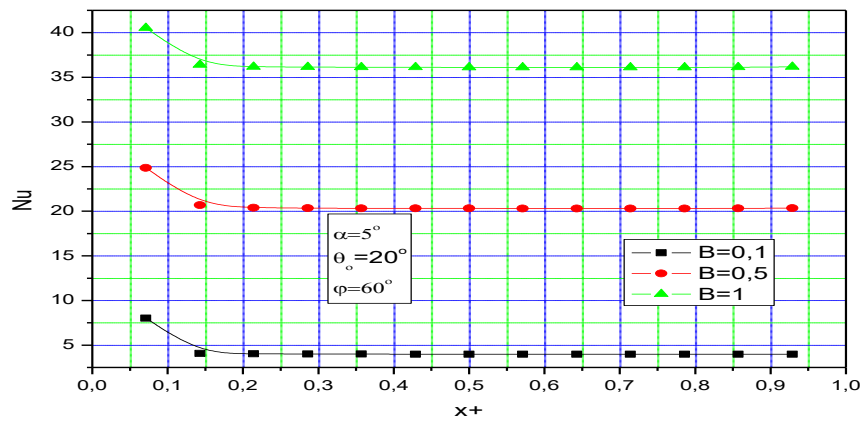


Figure 4.41.1

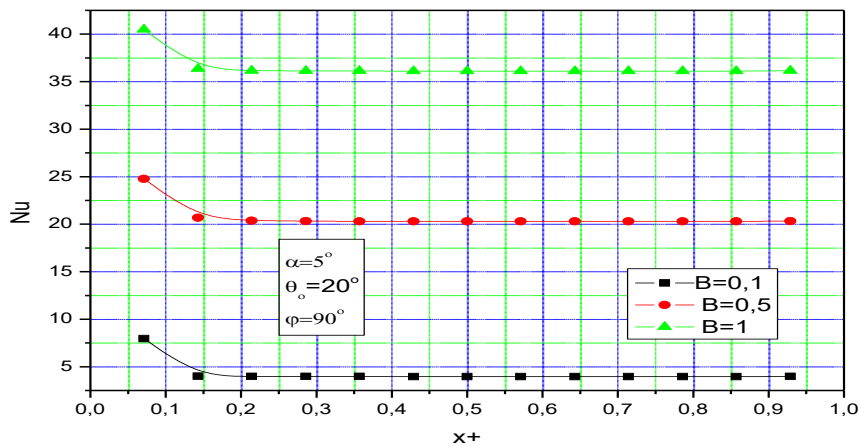


Figure 4.41.2

Figure 4.41: Evolution du nombre de Nusselt en fonction de x_+ , pour $Ec=0,02$ et plusieurs valeurs de paramètre de rotation B

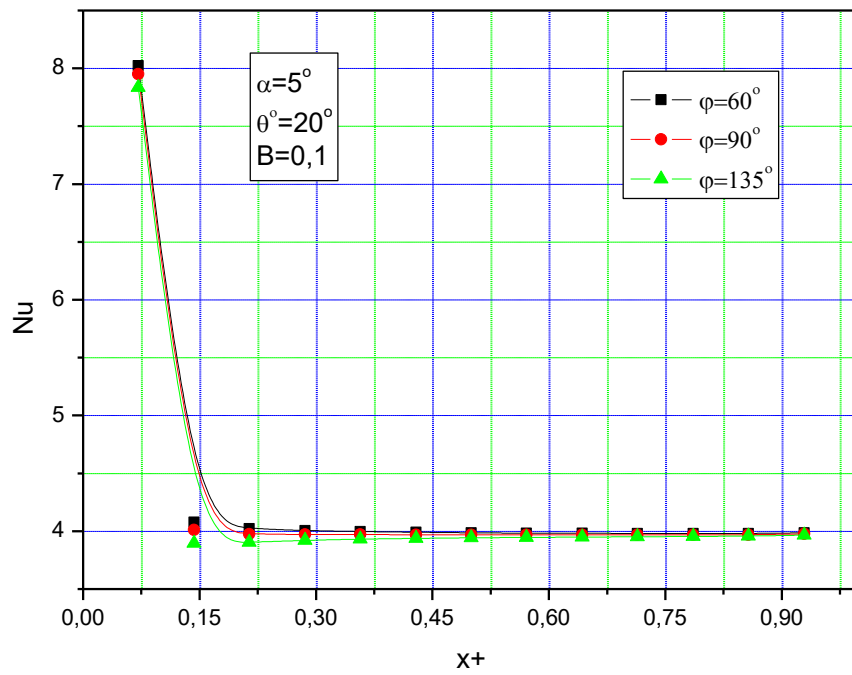


Figure 4.42.1

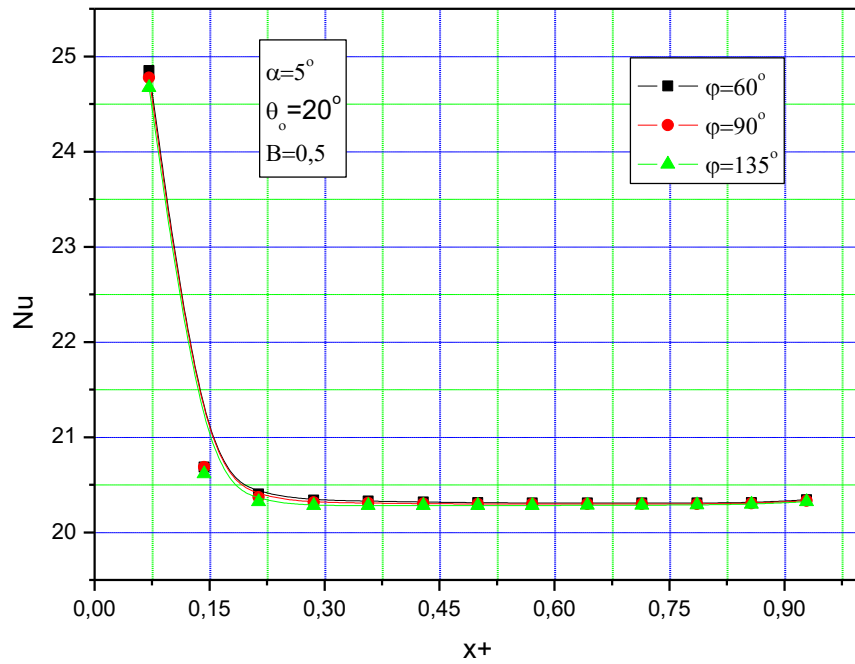


Figure 4.42.2

Figure 4.42: Evolution du nombre de Nusselt en fonction de x^+ , pour $Ec=0,02$ et plusieurs valeurs de φ .

4.1.3.5 Coefficients de frottements méridien C_{fu} et azimuthal C_{fw}

Pour l'angle d'inclinaison α et le demi-angle d'ouverture θ_0 fixés et pour plusieurs valeurs du paramètre de rotation B , les figures 4.43.1 et 4.43.2 nous montrent que l'augmentation de B fait augmenter le coefficient de frottement. Et pour l'angle d'inclinaison α , le demi-angle d'ouverture θ_0 et le paramètre de rotation B fixés et pour plusieurs valeurs φ_+ , il existe un point privilégié au point du décollement du fluide (figure 4.44).

Les figures 4.45 à 4.46 illustrent la variation du coefficient de frottement azimuthal en fonction de coordonnées azimuthal adimensionnelle φ_+ . L'étude se fait sur le demi-tour de la surface du cône ou sur la surface d'intervalle où $\varphi_+ \in [0^\circ, 180^\circ]$, sur les figures le coefficient de frottement azimuthal croit et prend la valeur maximale pour $\varphi_+ = 90^\circ$ et valeur nulle pour $\varphi_+ = 0^\circ$ et $\varphi_+ = 180^\circ$.

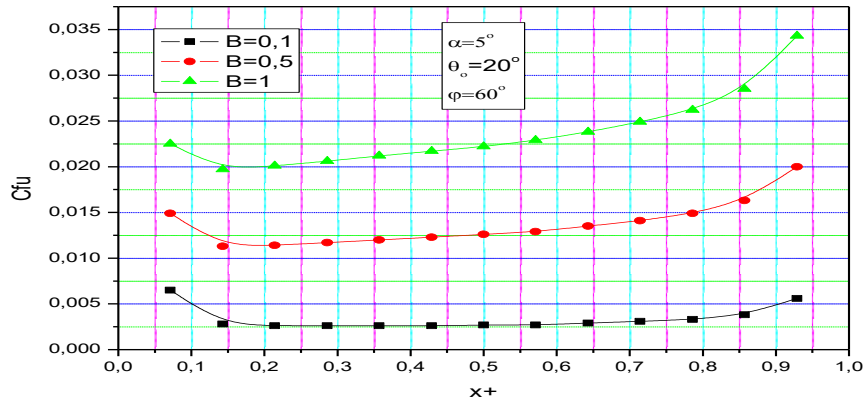


Figure 4.43.1

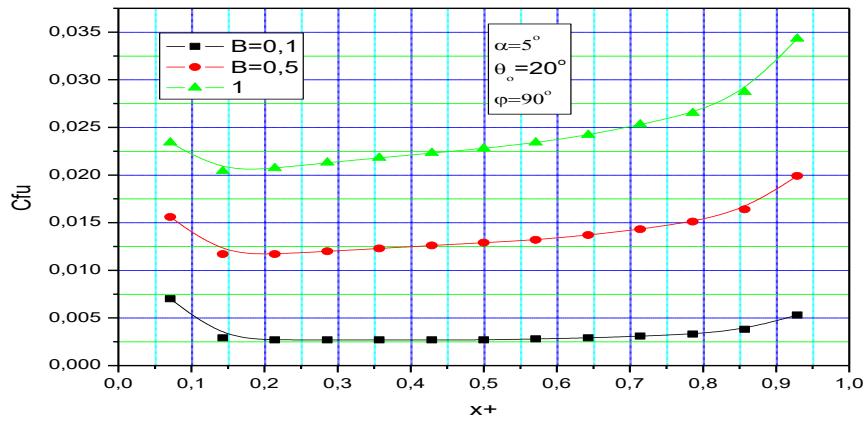


Figure 4.43.2

Figure 4.43: Evolution du coefficient de frottement pariétal méridien en fonction de x_+ , pour plusieurs valeurs de paramètre de rotation B .

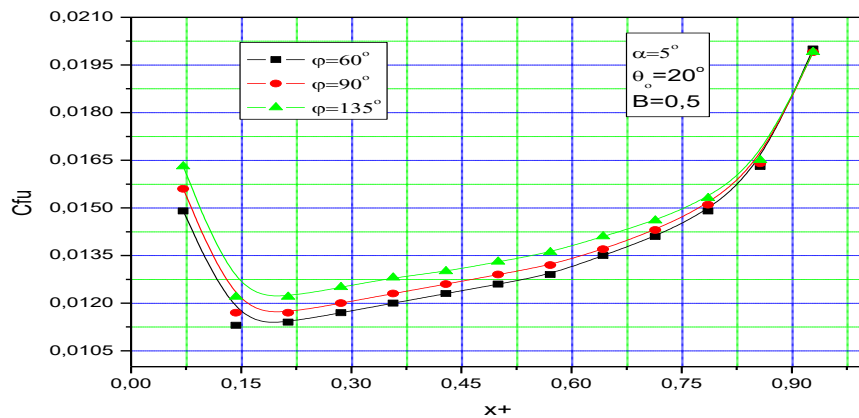


Figure 4.44: Evolution du coefficient de frottement pariétal méridien en fonction de x_+ , pour plusieurs valeurs de φ

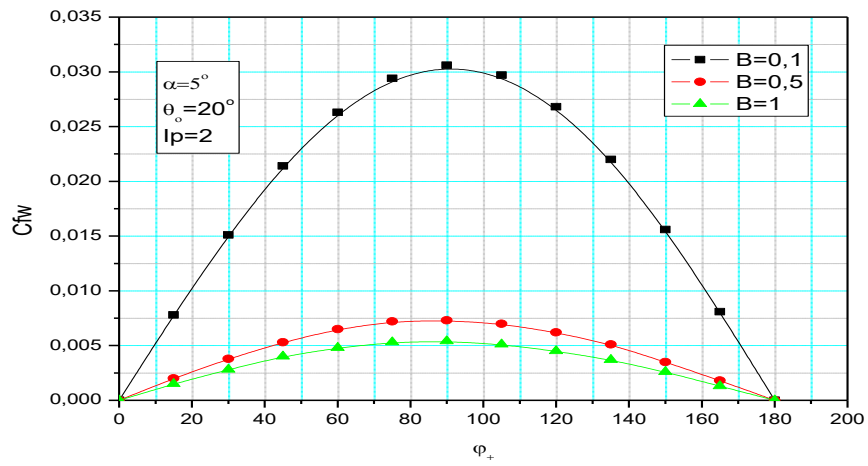


Figure 4.45.1

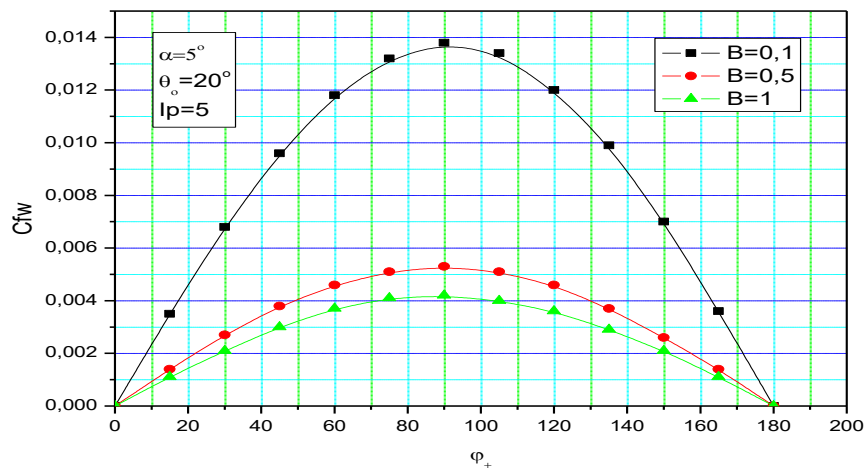


Figure 4.45.2

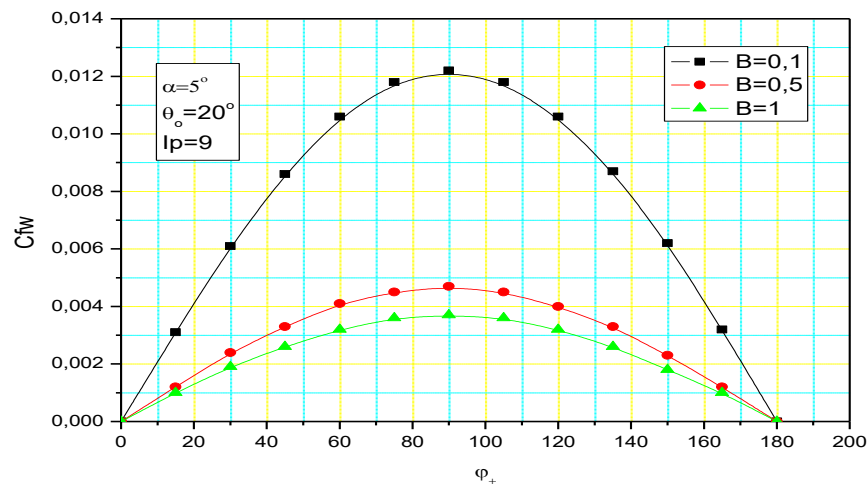


Figure 4.45.3

Figure 4.45: Evolution du coefficient de frottement azimutal en fonction de φ_+ , pour plusieurs valeurs de paramètre de rotation B

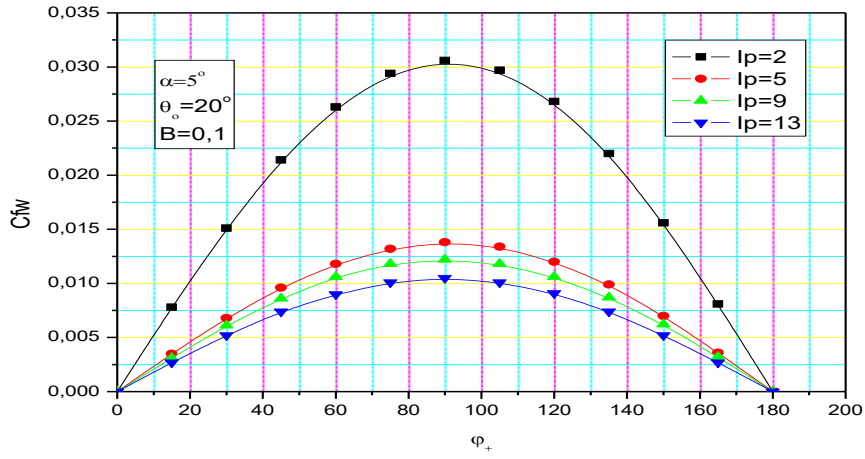


Figure 4.46.1

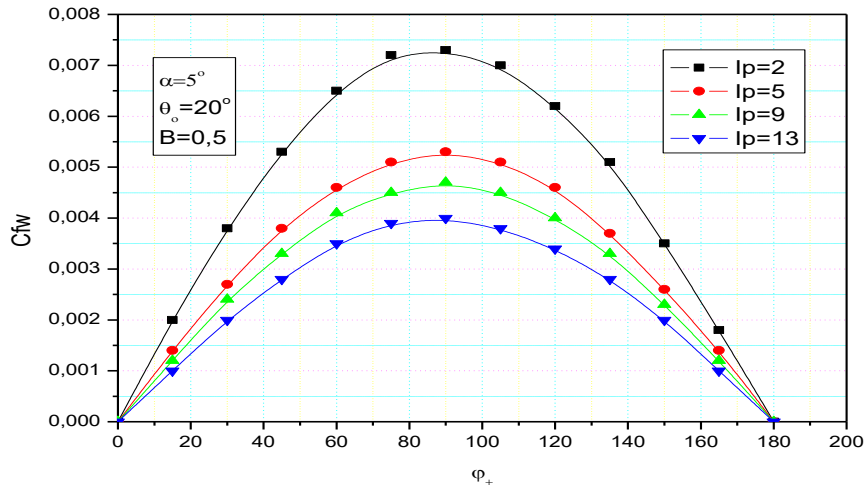


Figure 4.46.2

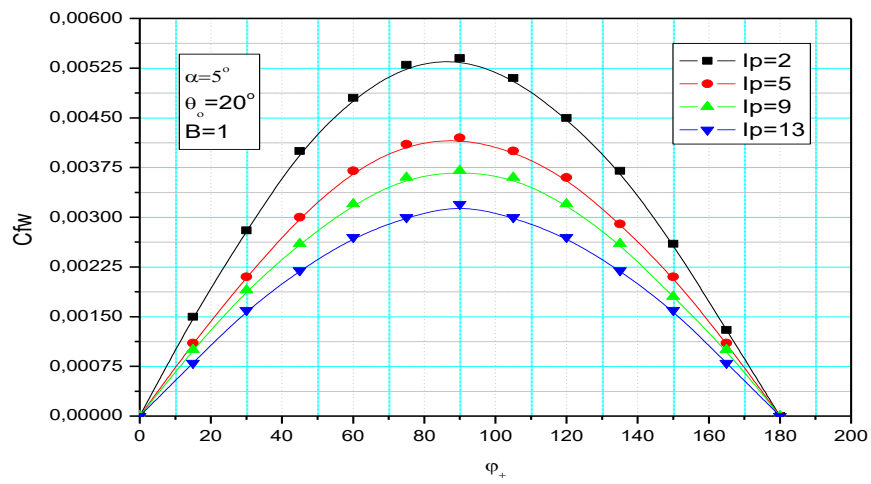


Figure 4.46.3

Figure 4.46: Evolution du coefficient de frottement azimuthal en fonction de φ_+ , pour plusieurs valeurs de paramètre de rotation B

CONCLUSION

Nous avons procédé à une étude numérique de l'écoulement et des transferts de chaleur dans la couche limite développée autour d'un cône tournant autour de son axe de révolution et plongé dans un écoulement forcé verticale ascendant. Les équations de transferts ont été résolues par un schéma implicite aux différences finies et la vitesse extérieure est définie dans [7]. Dans ce présent travail, nous avons simulé le système en faisant varier le paramètre de rotation qui indique la vitesse de rotation de ce corps d'une part et l'inclinaison et l'angle d'ouverture au sommet du cône d'autre part.

En premier lieu, nous avons bien décrit le problème en choisissant les références adaptées et les équations sont adimensionnalisées avec les coefficients en convection mixte et discrétisées. Ensuite, nous avons mis au point un programme informatique qui génère la simulation numérique des grandeurs physiques qui interviennent sur le transfert de chaleur.

Dans la première simulation, nous avons rapporté essentiellement l'étude sur l'influence de paramètre B , pour l'angle d'inclinaison $\alpha = 0^\circ$ et le demi angle d'ouverture du cône θ_0 fixés. Dans ces résultats, le comportement de l'écoulement est fluctuant, cependant, en observant d'une manière générale, on constate qu'une faible vitesse de rotation n'affecte pas beaucoup le mouvement du fluide sur la surface proche du sommet du cône. Lorsque le paramètre de rotation augmente, les résultats montrent notamment que la variation de ceci génère de forte perturbation de l'écoulement au voisinage de la circonférence de contact et que l'évolution du champ de vitesse extérieure est relativement complexe. Cette évolution est confirmée par celle du coefficient de frottement pariétal suivant la ligne méridienne. Comme le flux est constamment uniforme, alors l'échange de chaleur se fait uniquement suivant la normale par rapport à la surface génératrice du corps isotherme, en raison de la différence de température entre le fluide et la paroi. Toutefois, l'effet du paramètre de rotation est relativement très faible sur l'échange thermique au sein de la couche limite et sur l'épaisseur de celle-ci.

Dans la deuxième partie de la simulation, nous avons étudié le comportement de l'écoulement, en faisant varier l'angle d'inclinaison et d'ouverture au sommet du cône, cependant pour quelque valeur de ces angles. Nos résultats ont montré ainsi qu'il existe un point privilégié situé au voisinage du méridien d'équation $\varphi = 90^\circ$ auquel la composante normale est à la fois indépendante du paramètre de rotation, de l'angle d'inclinaison et de l'angle d'ouverture du cône, ainsi au voisinage du méridien proche du sommet $\varphi = 45^\circ$ auquel aussi la composante méridienne est à la fois indépendante de ces paramètres. Donc, dans cette position, la grandeur physique qui intervient sur l'épaisseur de la couche limite n'a aucune influence sur le transfert, quelles que soient les valeurs de B , de θ_0 et de α . La température ne varie guère qu'en fonction de la direction normale adimensionnelle qui représente l'échange entre la paroi et le fluide.

L'étude effectuée soutiendrait certainement l'écoulement hydrodynamique du fluide dans les capteurs ou aéromoteurs des éoliennes, d'où la nécessité d'usage d'un cône rigide sur celles-ci permettant de canaliser le fluide ou de mieux contribuer à la stabilité de la totalité de la structure. Le cône diminue dans les éoliennes l'effet de la perturbation et favorise la répartition rationnelle des fluides sur les pales de l'éolienne, et montre que celui-ci engendre un meilleur rendement pour le cas des aéromoteurs à axe horizontal.

Bref, nous avons étudié l'influence de la vitesse de rotation, de demi-angle d'ouverture et de l'angle d'inclinaison du cône dans la couche limite. Les résultats montrent notamment que la variation du coefficient de rotation B génère de perturbation de l'écoulement aux voisinages de la circonférence de contact et que l'évolution du champ de vitesse extérieure est relativement complexe. Dans la perspective, le prolongement de ce travail consiste sur une étude de l'influence de la convection mixte : rotatoire, forcée et naturelle, qui sera sans doute d'une importance capitale dans la recherche fondamentale qui nourrira certain axe de la recherche appliquée.

REFERENCES

- [1] - U. Canissius, *Etude numérique de la convection naturelle tridimensionnelle autour d'un cône de révolution incliné*, Thèse de doctorat, Université d'Antsiranana, Madagascar, 2016.
- [2] - U. Canissius, F. A. Rakotomanga, E. Alidina, *Etude numérique de la convection naturelle tridimensionnelle d'un cône de révolution incliné*, Afrique SCIENCE, Vol. 11, Issues1, pp. 1-11, 2015.
- [3] - C. Leticia, U. Canissius, E. Alidina, *Forced and Rotating Convection around a Cone of Revolution*, American Journal of Engineering Research, Vol. 9, Issue 11, pp. 48-53, 2020.
- [4] - G. Bezandry, R. Randrianarivelo, C. Leticia, E. Mourtallah-X, U. Canissius, E. Alidina, *Influence de l'écoulement forcé sur la convection rotatoire autour d'un cône de révolution incliné*, Afrique Science, Vol. 13, Issue 4, pp. 357-368, 2017.
- [5] - M. Siabdallah, B. Zeghmami, M. Daguene, *Etude de la convection naturelle thermique et massique dans la couche limite autour d'un tronc de cône à paroi sinusoïdale*, 12^è Journée Internationale de Thermique, Maroc, 2005.
- [6] - Pop, Tsung Yen. Natural convection over a vertical wavy frustum of a cone. Int. J. Non-linear Mechanics, Vol. 34, pp. 925-934, 1999.
- [7] - F. A. Rakotomanga, *Contribution à l'étude des transferts thermiques convectifs tridimensionnels autour d'un cône de révolution*, Thèse de doctorat, Université d'Antsiranana, Madagascar, 2013.
- [8] - F. A. Rakotomanga, E. Alidina, *Transfert thermiques convectifs tridimensionnels autour d'un cône de révolution*, Afrique Science, ref 6212, Vol. 12, Issue 4, pp. 88-98, 2016.
- [9] - G. Bezandry, R. Randrianarivelo, U. Canissius et E. Alidina, *Etude numérique de la convection rotatoire pure autour d'un cône de révolution*, Rev. Ivoir. Sci. Technol, Vol. 29, pp. 1-15, 2017.
- [10] - E. Mourtallah-X, F. A. Rakotomanga, U. Canissius, E. Alidina, *Numerical study of the three-dimensional mixed convection around an inclined cone of revolution*. American Journal of Engineering Research, Vol. 8, Issue 5, pp. 150-160, 2019.
- [11] - D. Anulkumar, S. Roy, *Unsteady mixed convection flow on a rotating cone in a rotating fluid*, Applied Mathematics and Computation, vol.155, Issue 2, pp. 545-561, 2004.
- [12] - R. Himasekhar, P. K. Sarma, K. Janardhan, *Laminar mixed convection from a vertical rotating cone*, International Communication in Heat and Mass transfer, Vol. 15, issue 1, pp. 99-108, 1989.
- [13] - M. Kumari, L. Pop, G. Nath, *Mixed convection along a vertical cone*, Int. Communication in Heat and Mass transfer, vol. 15, Issue 2, pp. 247-255, 1989.
- [14] - C. Raminosoa, M. Daguene, *Convection mixte autour d'une sphère. Influence de la variabilité des propriétés physiques du Fluide*, Revue Générale de Thermique, 1994.
- [15] - C. Raminosoa, R. Ratobison, A. Ali Cherif, A. Daif, M. Daguene, *Convection mixte autour d'une sphère*, Revue Générale de Thermique, 1995.

- [16] - Motognon Wastalas d'Assise Dogbalou, Mathew, Mark Kimathi, *Effects of variable viscosity on unsteady naturel convection hydromagnetic fluid over an isothermal sphere in a rotating system*, International Journal of Advances in Applied Mathematics and Mechanics, Vol. 7, Issue 1, Pages 41-57, 2019.
- [17] - J. Tajakumar, P. Saikrishman, Ali Chamkha, G A. F. Al-Mudhaf, *Non-Simiar Solution of Steady mhd mixed convection flow over a rotating sphere*, Computational Thermal Sciences, Vol. 8, Issue 6, pp. 509-523, 2016.
- [18] - G. Le Palec, *Etude de la convection mixte tridimensionnelle autour d'une sphère en rotation dans un écoulement ascendant de fluide newtonien*, Thèse de doctorat d'Etat, Université de Perpignan, 1986.
- [19] - G. Le Palec, M. Daghenet, *Laminar three-dimensional mixed convection about a rotating sphere in a stream*, International Journal Heat and Mass transfer, vol. 30, n°7, pp. 1516-1523, 1987.
- [20] - W. L. Mwangi, M. N Kinyanjui, S. M. Uppal, *Effects of temperature depende viscosity on magnetohydrodynamics natural convection flow past an isothermal sphere*, American Journal of Applied Fluid Mathematics, Vol. 4, Issue 1, pp. 53-61, 2016.
- [21] - W. L. Mwangi, M. N Kinyanjui, R. P Kiogora, *Effects of variable viscosity on unsteady natural convection hydromagnetic flow past an isothermal sphere*, American Journal of Applied Mathematics, Vol. 4, Issue 6, pp. 258-270, 2016.
- [22] - M. R. Haque, M. M. Alan, M. Ali, M. N. Sheikh, *Effects of viscous dissipation on mhd natural convection flow over a sphere with temperature dependent thermal conductivity in presence of heat generation*, European Scientific Journal Vol. 10, Issue 15, pp. 364-376, 2014.
- [23] - M. Molla, S. Saha, M. Hossain, *The effect of temperature dependent viscosity on mhd natural convection flow from an isothermal sphere*, Journal of Applied Fluid Mechanics, Vol. 5, Issue 2, pp. 25-31, 2012.
- [24] - G. Davino, M. A. Hulsen, F. Sniykers, J. Vermant, F. Greco, P. L. Maffettone, *Rotation of a sphere in a viscoelastic liquid Subjected to Shear flow.part i : Simulation results*, Journal of rheology, Vol. 52, Issue 6, pp. 1331-1346, 2008.
- [25] - N. A. Rahma, B. Widodo, D. Adzkiya, *Forced convection of unsteady magnetohydrodynamics fluid past a porous sphere*, AIP conference proceeding, Vol. 1913, Issue 1, pp. 020007, 2017.
- [26] - Driss Ouldhadda, *Etude de la convection mixte autour de corps à symétrie de révolution d'axe vertical en rotation en présence d'un écoulement forcé axial et d'une convection naturelle*. Thèse de doctorat, 1991.
- [27] - E Alidina, *Contribution à l'étude d'une convection mixte tridimensionnelle autour d'un ellipsoïde de révolution dans un écoulement ascendant de fluide newtonien*, Thèse de Doctorat d'Etat, Université d'Antananarivo, Madagascar, 1997.
- [28] - U. Canissius, *Numerical study of the three-dimensional free convection around an inclined ellipsoid of revolution*, American Journal of Engineering Research, Vol. 5, Issue 11, pp. 287-302, 2017.
- [29] - A. Ali Cherif, C. Raminosoa, M. Rakotomalala, A. Daif, M. Daguenet, *Contrôle hydrodynamique des couches limites thermiques en convection mixte autour d'ellipsoïdes aplatis asymétriques*, Elsevier Science Ltd., 1996.

- [30] - D. Chapkonga, R. Kiogora, K. Gitrere, *Fluid flow and heat transfer through a vertical cylindrical collapsible tube in presence of magnetic fluid and an obstacle*, International Journal of Advances in Applied Mathematics and mechanics, Vol. 6, Issue 4, pp. 41-49, 2019.
- [31] - K. B. Patel, *Simulation of incompressible cylindrical duct flow with electrically conducting fluid using finite difference method*, Advanced in computational Sciences and Technology, Vol. 10, Issue 6, pp. 1663-1674, 2017.
- [32] - P. Kozlovsky, Zaretsky, U. Jaffa, Elad, *General tube law for collapsible thin and thick-wall tubes*, Journal of biomechanics, Vol. 47, Issue 10, pp. 2378-2384, 2014.
- [33] - A. Siviglia, Toffolon, *Multiple states for flow through a collapsible tube with discontinuities*, Journal of Fluid Mechanics, Vol. 761, pp.105-122, 2014.
- [34] - S. Odejide, *Fluid flow and heat transfer in a collapsible tube with heat source or sink*, Journal of the Nigerian Mathematical Society, Vol. 34, Issue 1, pp. 40-49, 2015.
- [35] - Yann Guevel, *Méthodes numériques adaptées à la résolution des équations de Navier-Stokes*, Université Bretagne (Université de Bretagne-Sud), 2016.
- [36] - S. Mostala Giaasaan, *Convection Heat and Mass Transfer*, Second Edition.
- [37] - R. Comolet, *Mécanique expérimentale des fluides réels*, Turbo machines, Tome 2, Masson, Paris, 1976.
- [38] - E. A. Brun, A. Martinot-Lagarde, J. Mathieu, *Mécanique des fluides*, Tome 3, Dunod, Paris, 1970.
- [39] - Salina Aletar, Mahmuda Binte Mostafa Ruma, Md. Abdul Alim, *Conjugate effects of heat and mass transfer on natural convection flow along an isothermal sphere with radiation heat loss*, Open Journal of Fluid Dynamics, Volume 3, 2013, Pages 86-94.
- [40] - C. Raminosoa, *Convection mixte a propriétés physiques variables autour d'un corps a symétrie de révolution*, Thèse de Doctorat, Université d'Antsiranana, Madagascar, 1995.
- [41] - M. S. Rakotomalala, *Etude des transferts dans la couche limite entourant un corps a symétrie de révolution tournant dans un fluide en présence d'un écoulement axial et d'une convection naturelle*, Thèse de Doctorat d'Etat, Université Nice-Sophia Antipolis, France, 1994.
- [42] - Acques Padet, Renato M. Cotta, Emilia C. Miladin and Colette Padet, *Mixed thermal convection: fundamental issues and analysis of the planar case*, Annals of the Brazilian Academy of Sciences, Vol. 87, Issue 3, pp. 1865-1885, 2015.
- [43] - L.M. Iva, M.S. Hasan, S. K. Paul, R. N. Mondal, *mhd free convection heat and mass transfer flow over a vertical porous plate in a rotating system with hall current, heat source and suction*, International Journal of Advances in Applied Mathematics and Mechanics, Vol. 6, Issue 1, pp. 49-64, 2018.
- [44] - M. James, E. W. Mureithi, D. Kuznetsov, *Effects of variable viscosity of nanofluid flow over a permeable wedge embedded in saturated porous medium with chemical reaction and thermal radiation*, International Journal of Advances in Applied Mathematics and Mechanics, Vol. 2, Issue 3, pp. 101-118, 2015.
- [45] - J. Sorawala, M. Timol, *Analysis of thermal boundary layer flow of viscous fluid by new similarity method*, International Journal of Advances in Applied Mathematics and Mechanics, Vol; 6, Issue 1, pp. 68-77, 2018.
- [46] - A. Rahman, M. Alan, M. Uddin, *Influence of magnetic fluid and thermophoresis on transient forced convective heat and mass transfer flow along a porous wedge with variable*

thermal conductive and variable thermal conductivity and variable Prandtl number, International Journal of Advances in Applied Mathematics and Mechanics, Vol. 3, Issue 4, pp. 45-64, 2016.

[47] - A. Malekzadeh, A. Heydarinasab, Davir, *Magnetic field effect on fluid flow characteristics in a pipe for laminar flow*, Journal of Mechanical Science and technology, Vol. 25, Issue 2, pp. 333, 2011.

[48] - C. Brehm, J. Davis, S. Bailey, *A numerical investigation of the effects of rotation on turbulent pipe flows*, 11th International Symposium of Turbulence and Shear Flow Phenomene (TSFP11), Southampton, U.K., 2019.

[49] - D. M. Mwangi, S. Karanja, M. Kimathi, *Numerical investigation of the effect of curvature and neynold's number to radial relelocity in a curved porous pipe*, International Journal of Advances in Applied Mathematics and Mechanics, Vol. 06, Issue 03, pp. 99-110, 2017.

[50] - N. Banu, D. A. S. Rees. *Onset of Darcy-Benard convection using a thermal nonequilibrium model*, International Journal Heat and Mass Transfer, Vol. 45, Issue 11, pp. 2221- 2228, 2002.

[51] - Kitamura K., Kimura F. *Heat transfer and fluid flow of natural convection adjacent to upwar d facing horizontal plates*. Int. Journal of heat and mass transfer, Vol. 38, pp. 3149-3159, 1995.

[52] - S. Nadeem, Rizwan UI Haq, Z. H. Khan, *Heat transfer analysis of water-based nanofluid over an exponentially stratching sheat*, Alexandria Engineering Journal, vol. 53, Issue 1, pp. 219 - 224, 2014.

[53] - C. Sulochana, G. P. Ashwinkumar, N. Sandeep, *Numerical investigation of chemically reacting mhd flow due to a rotating cone with thermophoresis and Brownian motion*, International Journal of Advanced Science and Technology, vol. 86, Issue 1, pp. 61-74, 2016.

ANNEXE

Cette annexe a pour objectif de présenter un certain nombre de rappels mathématiques sur les transformations des coordonnées et sur les opérateurs des dérivées partielles, ainsi que l'établissement des équations de transfert dans la couche limite.

A1.1 Rappels de quelques éléments mathématiques

Considérons un point quelconque P de l'espace repéré d'une part par ses coordonnées rectiligne (x, y, z) dans un repère cartésien fixe d'origine O.

P(x, y, z) dans un repère cartésien orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, et ses coordonnées généralisées (q_1, q_2, q_3) .

$\vec{OP}$: Rayon vecteur qui définit la position du point par rapport à l'origine O du repère, tel que :
 $\vec{OP} = \vec{OP}(q_1, q_2, q_3)$

Effectuons la transformation suivante :

$$\begin{cases} x = x(q_1, q_2, q_3) \\ y = y(q_1, q_2, q_3) \\ z = z(q_1, q_2, q_3) \end{cases} \quad (\text{A1.1.1})$$

$$J = \left[\frac{\partial \vec{P}}{\partial q_1}, \frac{\partial \vec{P}}{\partial q_2}, \frac{\partial \vec{P}}{\partial q_3} \right]_{(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial q_1} & \frac{\partial x}{\partial q_2} & \frac{\partial x}{\partial q_3} \\ \frac{\partial y}{\partial q_1} & \frac{\partial y}{\partial q_2} & \frac{\partial y}{\partial q_3} \\ \frac{\partial z}{\partial q_1} & \frac{\partial z}{\partial q_2} & \frac{\partial z}{\partial q_3} \end{bmatrix} \quad (\text{A1.1.2})$$

Si le déterminant de la matrice jacobienne n'est pas nul, le triplet $\left(\frac{\partial \vec{P}}{\partial q_1}, \frac{\partial \vec{P}}{\partial q_2}, \frac{\partial \vec{P}}{\partial q_3} \right)$ constitue une base de l'espace à laquelle on associe le repère naturel $\left(P; \frac{\partial \vec{P}}{\partial q_1}, \frac{\partial \vec{P}}{\partial q_2}, \frac{\partial \vec{P}}{\partial q_3} \right)$.

La matrice jacobienne J, dont les colonnes sont les composantes du tenseur métrique dans la base rectiligne, permet de passer du premier système de coordonnée au second.

Etudions le carré de la différentielle à l'arc d'une courbe :

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (\text{A1.1.3})$$

La différentiation du système (A1.1.1) donne :

$$\begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial x}{\partial q_3} dq_3 \\ dy &= \frac{\partial y}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial y}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial y}{\partial q_3} dq_3 \end{aligned} \quad (\text{A1.1.4})$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial z}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial z}{\partial q_3} dq_3$$

En utilisant les équations précédentes, on écrit :

$$ds^2 = g_{11}(dq_1)^2 + g_{22}(dq_2)^2 + g_{33}(dq_3)^2 + 2g_{12}dq_1dq_2 + 2g_{23}dq_2dq_3 + g_{31}dq_3dq_1$$

$$\begin{aligned} g_{11} &= \left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)^2 = \left\|\frac{\partial \vec{P}}{\partial q_1}\right\|^2 \\ g_{22} &= \left(\frac{\partial x}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_2}\right)^2 = \left\|\frac{\partial \vec{P}}{\partial q_2}\right\|^2 \\ g_{33} &= \left(\frac{\partial x}{\partial q_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_3}\right)^2 = \left\|\frac{\partial \vec{P}}{\partial q_3}\right\|^2 \\ g_{12} &= \left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial q_2}\right) + \left(\frac{\partial y}{\partial q_1}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial q_2}\right) + \left(\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial q_2}\right) = \left(\frac{\partial \vec{P}}{\partial q_1}\right)\left(\frac{\partial \vec{P}}{\partial q_2}\right) \\ g_{23} &= \left(\frac{\partial x}{\partial q_2}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial q_3}\right) + \left(\frac{\partial y}{\partial q_2}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial q_3}\right) + \left(\frac{\partial z}{\partial q_2}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial q_3}\right) = \left(\frac{\partial \vec{P}}{\partial q_2}\right)\left(\frac{\partial \vec{P}}{\partial q_3}\right) \\ g_{31} &= \left(\frac{\partial x}{\partial q_3}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right) + \left(\frac{\partial y}{\partial q_3}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial q_1}\right) + \left(\frac{\partial z}{\partial q_3}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial q_1}\right) = \left(\frac{\partial \vec{P}}{\partial q_3}\right)\left(\frac{\partial \vec{P}}{\partial q_1}\right) \end{aligned} \quad (\text{A1.1.5})$$

La condition nécessaire et suffisante pour que les lignes de coordonnées $q_1=\text{constante}$ c_1 , $q_2=\text{constante}$ c_2 , $q_3=\text{constante}$ c_3 soient deux à deux orthogonales et que :

$$g_{12} = g_{23} = g_{31} = 0 \quad (\text{A1.1.6})$$

Ce qui se traduit par l'orthogonalité deux à deux des vecteurs tangents aux lignes coordonnées. Dans ce cas, on dit que les coordonnées curvilignes q_1, q_2, q_3 sont orthogonales et que le repère local $\left(P; \frac{\partial \vec{P}}{\partial q_1}, \frac{\partial \vec{P}}{\partial q_2}, \frac{\partial \vec{P}}{\partial q_3}\right)$ est un repère orthogonal.

En posant

$$\begin{aligned} h_1 &= \sqrt{g_{11}} = \left\|\frac{\partial \vec{P}}{\partial q_1}\right\| \\ h_2 &= \sqrt{g_{22}} = \left\|\frac{\partial \vec{P}}{\partial q_2}\right\| \\ h_3 &= \sqrt{g_{33}} = \left\|\frac{\partial \vec{P}}{\partial q_3}\right\| \end{aligned} \quad (\text{A1.1.7})$$

On définit le repère orthonormé $\left(P; \frac{1}{h_1} \frac{\partial \vec{P}}{\partial q_1}, \frac{1}{h_2} \frac{\partial \vec{P}}{\partial q_2}, \frac{1}{h_3} \frac{\partial \vec{P}}{\partial q_3}\right)$ associé au repère local.

A1.2 Opérateurs aux dérivés partielles en coordonnées curvilignes orthogonales

Considérons donc un système de coordonnées curvilignes orthogonales (q_1, q_2, q_3) associé à la base locale orthonormé $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

Désignons par f un champ scalaire et $\vec{V}$ un vecteur vitesse et écrivons que :

$$\begin{cases} f = f(x_1, x_2, x_3) \\ \vec{V} = V_1 \vec{e}_1 + V_2 \vec{e}_2 + V_3 \vec{e}_3 \end{cases} \quad (\text{A1.2.1})$$

1) Expression générale d'un gradient

$$\overrightarrow{\text{grad}} f = \frac{1}{h_1} \frac{\partial f}{\partial x_1} \vec{e}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial f}{\partial x_2} \vec{e}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial f}{\partial x_3} \vec{e}_3 \quad (\text{A1.2.2})$$

2) Expression générale de la divergence

$$\overrightarrow{\text{div}} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial(h_2 h_3 V_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(h_3 h_1 V_2)}{\partial x_2} + \frac{\partial(h_1 h_2 V_3)}{\partial x_3} \right] \quad (\text{A1.2.3})$$

h_1, h_2, h_3 représentent les facteurs de proportionnalités du système curviligne.

3) Expression générale du Laplacien scalaire

$$\Delta f = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial f}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial f}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial f}{\partial x_3} \right) \right] \quad (\text{A1.2.4})$$

4) Expression générale du rotationnel

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \vec{e}_1 & h_2 \vec{e}_2 & h_3 \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ h_1 V_1 & h_2 V_2 & h_3 V_3 \end{vmatrix} \quad (\text{A1.2.5})$$

5) Expression générale du tenseur gradient

$$\overrightarrow{\text{grag}} \vec{V} = \begin{vmatrix} \frac{1}{h_1} \frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \frac{V_2}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial x_2} + \frac{V_3}{h_1 h_3} \frac{\partial h_1}{\partial x_3} & \frac{1}{h_2} \frac{\partial V_1}{\partial x_2} - \frac{V_2}{h_1 h_2} \frac{\partial h_2}{\partial x_1} & \frac{1}{h_3} \frac{\partial V_1}{\partial x_3} - \frac{V_3}{h_1 h_3} \frac{\partial h_3}{\partial x_1} \\ \frac{1}{h_1} \frac{\partial V_2}{\partial x_1} - \frac{V_1}{h_2 h_1} \frac{\partial h_1}{\partial x_2} & \frac{1}{h_2} \frac{\partial V_2}{\partial x_2} + \frac{V_3}{h_2 h_3} \frac{\partial h_2}{\partial x_3} + \frac{V_1}{h_2 h_1} \frac{\partial h_2}{\partial x_1} & \frac{1}{h_3} \frac{\partial V_2}{\partial x_3} - \frac{V_3}{h_3 h_2} \frac{\partial h_3}{\partial x_2} \\ \frac{1}{h_1} \frac{\partial V_3}{\partial x_1} - \frac{V_1}{h_3 h_1} \frac{\partial h_1}{\partial x_3} & \frac{1}{h_2} \frac{\partial V_3}{\partial x_2} - \frac{V_2}{h_3 h_2} \frac{\partial h_2}{\partial x_3} & \frac{1}{h_3} \frac{\partial V_3}{\partial x_3} + \frac{V_1}{h_3 h_1} \frac{\partial h_3}{\partial x_1} + \frac{V_2}{h_3 h_2} \frac{\partial h_3}{\partial x_2} \end{vmatrix} \quad (\text{A1.2.6})$$

6) Expression générale de la divergence d'un tenseur

Considérons le tenseur

$$\vec{T}(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) = \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{vmatrix} \quad (\text{A1.2.7})$$

On a:

$$\overrightarrow{\text{div}} \vec{T} = (\overrightarrow{\text{div}} \vec{T})_1 \vec{e}_1 + (\overrightarrow{\text{div}} \vec{T})_2 \vec{e}_2 + (\overrightarrow{\text{div}} \vec{T})_3 \vec{e}_3 \quad (\text{A1.2.7.1})$$

Avec:

$$\begin{aligned}
(\overrightarrow{div\bar{T}})_1 &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} (h_2 h_3 T_{11}) + \frac{\partial}{\partial x_2} (h_3 h_1 T_{12}) + \frac{\partial}{\partial x_3} (h_1 h_2 T_{13}) \right] + \frac{T_{21}}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial x_2} \\
&\quad + \frac{T_{31}}{h_1 h_3} \frac{\partial h_1}{\partial x_3} - \frac{T_{22}}{h_1 h_2} \frac{\partial h_2}{\partial x_1} - \frac{T_{33}}{h_1 h_3} \frac{\partial h_3}{\partial x_1} \\
(\overrightarrow{div\bar{T}})_2 &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} (h_2 h_3 T_{21}) + \frac{\partial}{\partial x_2} (h_3 h_1 T_{22}) + \frac{\partial}{\partial x_3} (h_1 h_2 T_{23}) \right] + \frac{T_{32}}{h_2 h_3} \frac{\partial h_1}{\partial x_3} \\
&\quad + \frac{T_{12}}{h_2 h_1} \frac{\partial h_2}{\partial x_1} - \frac{T_{33}}{h_2 h_3} \frac{\partial h_3}{\partial x_2} - \frac{T_{11}}{h_2 h_1} \frac{\partial h_1}{\partial x_2} \\
(\overrightarrow{div\bar{T}})_3 &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} (h_2 h_3 T_{31}) + \frac{\partial}{\partial x_2} (h_3 h_1 T_{32}) + \frac{\partial}{\partial x_3} (h_1 h_2 T_{33}) \right] + \frac{T_{13}}{h_3 h_1} \frac{\partial h_3}{\partial x_1} \\
&\quad + \frac{T_{23}}{h_3 h_2} \frac{\partial h_3}{\partial x_2} - \frac{T_{11}}{h_3 h_1} \frac{\partial h_1}{\partial x_3} - \frac{T_{22}}{h_3 h_2} \frac{\partial h_2}{\partial x_3}
\end{aligned} \tag{A1.2.7.2}$$

Le Laplacien vectoriel est défini par :

$$\overrightarrow{\Delta V} = \overrightarrow{div}(\overrightarrow{grad V}) \tag{A1.2.8}$$

Le vecteur $\vec{V}$ représente le champ de vecteur.

A1.3 Applications à un cône de révolution

A1.3.1 Coordonnées rectilignes. Coordonnées curvilignes

1. Définition

Choisissons comme repère cartésien de référence le repère $R(0; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ où l'origine est le sommet du cône Figure A1.1, $\vec{e}_z$ est le vecteur unitaire ascendant porté par l'axe de révolution (o, o'), $\vec{e}_y$ est le vecteur unitaire dirigé vers le lecteur et orthogonal au plan de symétrie (π_o) qui est le plan vertical contenant l'axe de révolution et $\vec{e}_x$ est le vecteur unitaire de telle sorte que le repère considéré soit un repère orthonormé direct.

Considérons un point quelconque P du fluide et désignons par M son projeté orthogonal sur la paroi du cône. Le point P sera repéré par les coordonnées curvilignes s, y, φ telles que s est l'abscisse curviligne de M mesuré à partir de O, y est la coordonnée normale et φ la coordonnée azimutale ou angulaire.

2. Les lignes coordonnées

La ligne coordonnée associée à s est la droite OM(C_x) passant par le point M. Elle est parcourue dans le sens de s croissante à partir de l'origine O.

La ligne coordonnée associée à y est la demi-droite MP dirigée vers l'extérieur. Elle est parcourue dans le sens des y croissantes à partir de M vers le sein du fluide.

La ligne coordonnée associée à φ est la trace du cône dans le plan passant par le point dont le centre H est le point d'intersection de l'axe de révolution avec ce plan. Elle est parcourue dans le sens des φ croissants autour de l'axe $\vec{e}_z$, c'est-à-dire dans le sens trigonométrique à partir du plan vertical (π_0).

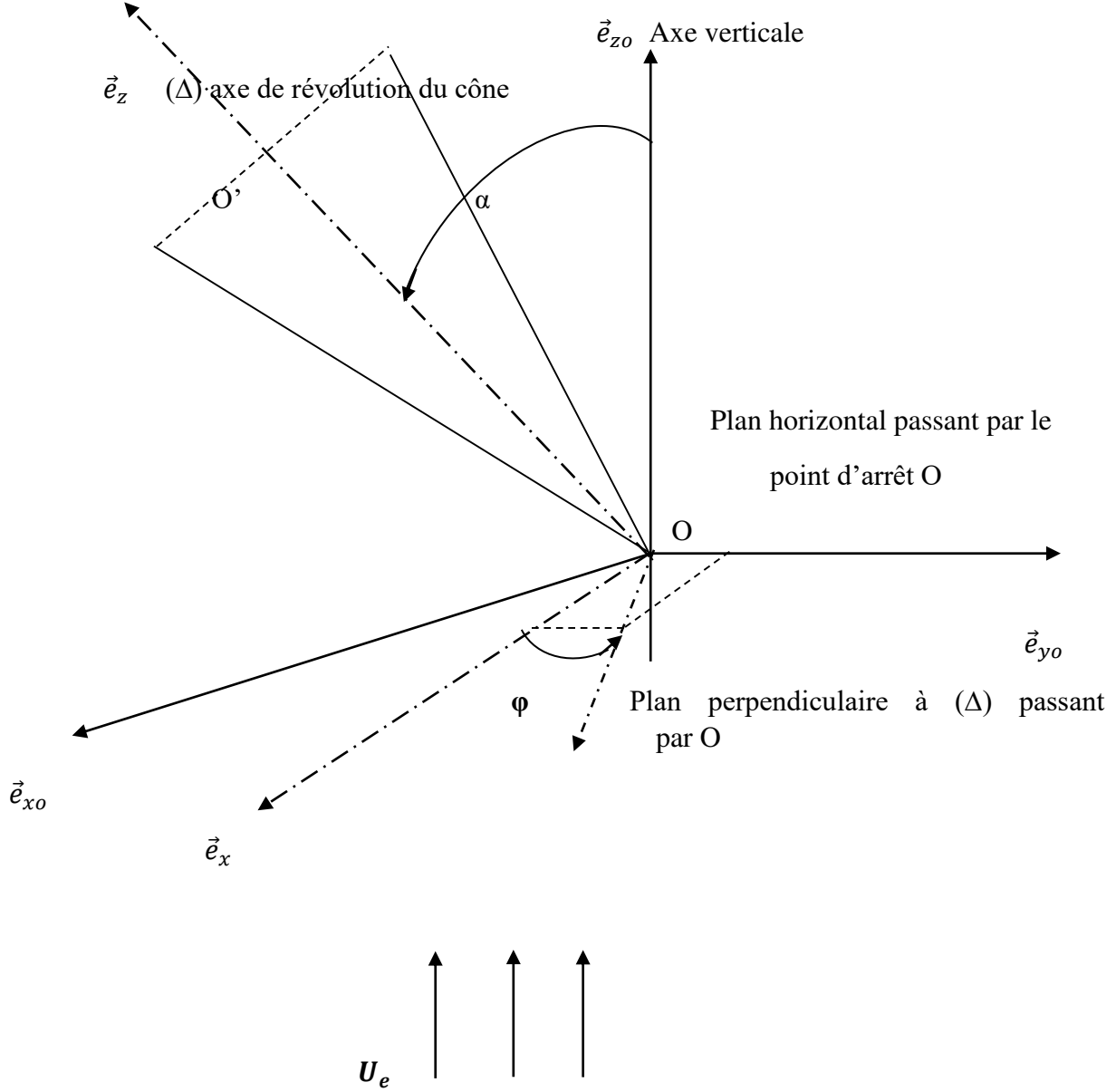


Figure A1.1 : Représentation schématique du système étudié

3. Base locale. Orthogonalité des coordonnées. Coefficients métriques

La base locale est définie par le triplet $\left(\frac{\partial \vec{P}}{\partial s}, \frac{\partial \vec{P}}{\partial y}, \frac{\partial \vec{P}}{\partial z} \right)$. Désignons par $\vec{e}_n$ le vecteur unitaire porté par la normale extérieure à la paroi et $\vec{e}_t$ le vecteur unitaire tangent à la paroi et porté par le rayon vecteur $\overrightarrow{OM}$. Pour simplifier les calculs, nous écrivons :

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MP} = s\vec{e}_t + y\vec{e}_n \quad (\text{A1.3.1})$$

On en déduit :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \vec{P}}{\partial y} &= \frac{\partial \overrightarrow{MP}}{\partial y} = \vec{e}_n \\ \frac{\partial \vec{P}}{\partial s} &= \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial s} = \vec{e}_t \\ \frac{\partial \vec{P}}{\partial \varphi} &= \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \varphi} = \frac{\partial (s\vec{e}_t)}{\partial \varphi} = s \frac{\partial \vec{e}_t}{\partial \varphi}\end{aligned}\tag{A1.3.2}$$

Par ailleurs, dans le système de coordonnées sphériques (s, Θ_o, φ) où $\Theta_o = \text{Cte}$ dans le cas présent, les coordonnées X_M, Y_M, Z_M d'un point M de la surface du cône vérifient les équations paramétriques suivantes :

$$\begin{cases} X_M = s \sin \theta_o \cos \varphi \\ Y_M = s \sin \theta_o \sin \varphi \\ Z_M = s \cos \theta_o \end{cases}\tag{A1.3.3}$$

Pour $0 \leq \varphi \leq 2\pi$

La distance r du point M à l'axe de révolution est donnée par :

$$r = \sqrt{X_M^2 + Y_M^2} = s \sin \theta_o$$

$$\frac{\partial \vec{M}}{\partial s} = \sin \theta_o \cos \varphi \vec{e}_x + \sin \theta_o \sin \varphi \vec{e}_y + \cos \theta_o \vec{e}_z\tag{A1.3.3.1}$$

$$\frac{\partial \vec{M}}{\partial \varphi} = s \sin \theta_o \sin \varphi \vec{e}_x + s \sin \theta_o \cos \varphi \vec{e}_y\tag{A1.3.3.2}$$

Les dérivées partielles $\frac{\partial \vec{M}}{\partial s}$ et $\frac{\partial \vec{M}}{\partial \varphi}$ donnent les vecteurs orientés le long des tangentes aux lignes coordonnées (C_s) et (C_φ) . Le produit vectoriel $\frac{\partial \vec{M}}{\partial \varphi} \wedge \frac{\partial \vec{M}}{\partial s}$ est donc un vecteur perpendiculaire au plan tangent $\left[\frac{\partial \vec{M}}{\partial s}, \frac{\partial \vec{M}}{\partial \varphi} \right]$, orienté suivant la normale extérieure à la surface. En tenant compte de l'orientation dans le sens direct de ces vecteurs, le vecteur unitaire de ce produit vectoriel s'identifie à la normale extérieure unitaire $\vec{e}_n$:

$$\vec{e}_n = \frac{\partial \vec{M}}{\partial \varphi} \wedge \frac{\partial \vec{M}}{\partial s} = \frac{\frac{\partial \vec{M}}{\partial \varphi} \wedge \frac{\partial \vec{M}}{\partial s}}{\left| \frac{\partial \vec{M}}{\partial \varphi} \wedge \frac{\partial \vec{M}}{\partial s} \right|}\tag{A1.3.4}$$

Il va de soi que :

$$\begin{aligned}g_{ys} &= \frac{\partial \vec{M}}{\partial y} \cdot \frac{\partial \vec{M}}{\partial s} = 0 \\ g_{y\varphi} &= \frac{\partial \vec{M}}{\partial y} \cdot \frac{\partial \vec{M}}{\partial \varphi} = 0\end{aligned}\tag{A1.3.5}$$

Il est aisé de vérifier que :

$$g_{s\varphi} = \frac{\partial \vec{M}}{\partial s} \cdot \frac{\partial \vec{M}}{\partial \varphi} = 0\tag{A1.3.6}$$

Les coefficients métriques croisés étant tous les trois nuls, les coordonnées curvilignes s, y et φ sont des coordonnées orthogonales.

Le carré de la différentielle à l'arc dans l'espace s'écrit alors :

$$ds^2 = g_{ss}ds^2 + g_{\varphi\varphi}d\varphi^2 + g_{yy}dy^2 \quad (\text{A1.3.7})$$

Avec

$$g_{ss} = \left\| \frac{\partial \vec{M}}{\partial s} \right\|^2 = 1 \quad (\text{A1.3.7.1})$$

$$g_{\varphi\varphi} = \left\| \frac{\partial \vec{M}}{\partial \varphi} \right\|^2 = r^2 \quad (\text{A1.3.7.2})$$

$$g_{yy} = \left\| \frac{\partial \vec{M}}{\partial y} \right\|^2 = 1 \quad (\text{A1.3.7.3})$$

Il s'ensuit que :

$$h_s = 1, \quad h_y = 1, \quad h_\varphi = r \quad (\text{A1.3.7.4})$$

Dans le repère cartésien de référence $R(0; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, les vecteurs unitaires de la base locale sont donc exprimés de la manière suivante :

$$\vec{e}_t = \frac{1}{h_s} \frac{\partial \vec{P}}{\partial s} = \sin\theta_o \cos\varphi \vec{e}_x + \sin\theta_o \sin\varphi \vec{e}_y + \cos\theta_o \vec{e}_z \quad (\text{A1.3.8.1})$$

$$\vec{e}_y = \frac{1}{h_y} \frac{\partial \vec{M}}{\partial y} = \cos\theta_o \cos\varphi \vec{e}_x + \cos\theta_o \sin\varphi \vec{e}_y - \sin\theta_o \vec{e}_z \quad (\text{A1.3.8.2})$$

$$\vec{e}_z = \frac{1}{h_\varphi} \frac{\partial \vec{M}}{\partial \varphi} = \sin\varphi \vec{e}_x + \cos\varphi \vec{e}_y \quad (\text{A1.3.8.3})$$

Ainsi, le repère local orthonormé est le repère naturel $(M; \vec{e}_t, \vec{e}_n, \vec{e}_\varphi)$.

La matrice jacobienne qui permet de passer de la base rectiligne à la base locale orthonormée s'écrit :

$$J = \begin{bmatrix} \sin\theta_o \cos\varphi & \cos\theta_o \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\theta_o \sin\varphi & \cos\theta_o \sin\varphi & \cos\theta_o \\ \cos\theta_o & -\sin\varphi & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A1.3.9})$$

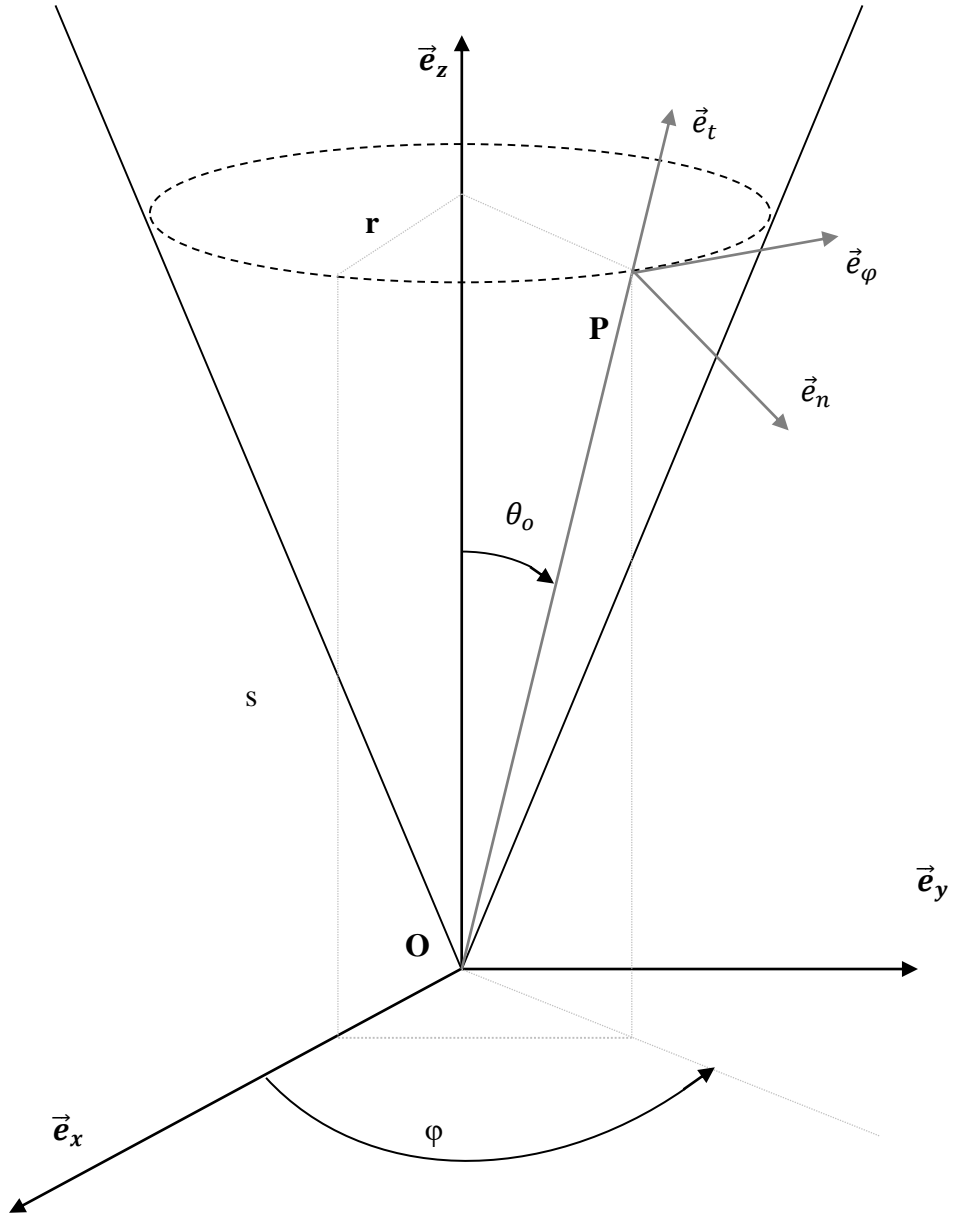


Figure A1.2: Représentation de la base de référence et de la base locale sur le cône.

Remarque :

Les coordonnées curvilignes s , y et φ sont des coordonnées orthogonales sur le cône.

En effet, un point quelconque P du fluide, repéré par les coordonnées curvilignes s , y , et φ , est défini par son rayon vecteur :

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MP} = \overrightarrow{OM} + y\vec{e}_n \quad (\text{A1.3.10})$$

Avec :

$$\frac{\partial \vec{P}}{\partial y} = \vec{e}_n \quad (\text{A1.3.11.1})$$

$$\frac{\partial \vec{P}}{\partial s} = \frac{\partial \vec{M}}{\partial s} \quad (\text{A1.3.11.2})$$

$$\frac{\partial \vec{P}}{\partial \varphi} = \frac{\partial \vec{M}}{\partial \varphi} \quad (\text{A1.3.11.3})$$

Dans le système de coordonnées sphériques (l, θ, φ) $l=R$ dans le cas d'une sphère de rayon R , le point M est paramétré de la manière suivante :

$$\begin{cases} X_M = R \sin\theta_o \cos\varphi \\ Y_M = R \sin\theta_o \sin\varphi \\ Z_M = R \cos\theta_o \end{cases} \quad (\text{A1.3.12})$$

Pour $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ et $0 \leq \theta \leq \theta_o$

La distance du point M à l'axe de révolution est donnée par :

$$r = R \sin \theta$$

L'abscisse curviligne s de M , dont le sens de sa parcourt de la ligne de coordonnée associée à θ , est telle que : $ds = -R d\theta$, $d\theta$ étant la variation du paramètre θ .

On écrit :

$$\frac{\partial \vec{P}}{\partial s} = \frac{\partial \vec{M}}{\partial s} = \frac{\partial \vec{M}}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial s} = -\cos\theta \cos\varphi \vec{e}_x - \cos\theta \sin\varphi \vec{e}_y + \sin\theta \vec{e}_z \quad (\text{A1.3.13.1})$$

$$\frac{\partial \vec{P}}{\partial \varphi} = \frac{\partial \vec{M}}{\partial \varphi} = -R \sin\theta \sin\varphi \vec{e}_x + \sin\theta \cos\varphi \vec{e}_y \quad (\text{A1.3.13.2})$$

$\frac{\partial \vec{M}}{\partial \varphi} \wedge \frac{\partial \vec{M}}{\partial s}$ étant un vecteur perpendiculaire au plan $\left[\frac{\partial \vec{P}}{\partial \varphi}, \frac{\partial \vec{M}}{\partial s} \right]$ orienté suivant la normale extérieure à la surface,

$$\frac{\partial \vec{P}}{\partial y} = \frac{\frac{\partial \vec{M}}{\partial \varphi} \wedge \frac{\partial \vec{M}}{\partial s}}{\left\| \frac{\partial \vec{M}}{\partial \varphi} \wedge \frac{\partial \vec{M}}{\partial s} \right\|} = \sin\theta \cos\varphi \vec{e}_x + \sin\theta \sin\varphi \vec{e}_y + \cos\theta \vec{e}_z \quad (\text{A1.3.13.3})$$

Il vient :

$$\begin{aligned} q_1 = s, \quad h_s = \sqrt{g_{ss}} &= \left\| \frac{\partial \vec{P}}{\partial s} \right\| = 1 \\ q_2 = y, \quad h_y = \sqrt{g_{yy}} &= \left\| \frac{\partial \vec{P}}{\partial y} \right\| = 1 \\ q_3 = \varphi, \quad h_\varphi = \sqrt{g_{\varphi\varphi}} &= \left\| \frac{\partial \vec{P}}{\partial \varphi} \right\| = R \sin\theta = r \end{aligned} \quad (\text{A1.3.14})$$

On vérifie aisément que les coefficients métriques croisés sont tous nuls.

A1.2.2 Passage de la base rectiligne de référence à la base locale orthonormée

Désignons par X_r, Y_r, Z_r les composantes d'un vecteur $\vec{V}$ dans la base rectiligne orthonormée et par X_t, Y_n et Z_φ des composantes dans la base locale orthonormée.

$$\vec{V} = X_r \vec{e}_x + Y_r \vec{e}_y + Z_r \vec{e}_z \quad (\text{A1.3.15.1})$$

$$\vec{V} = X_t \vec{e}_t + Y_n \vec{e}_n + Z_\varphi \vec{e}_\varphi \quad (\text{A1.3.15.2})$$

Telle que :

$$\begin{bmatrix} X_r \\ Y_r \\ Z_r \end{bmatrix} = [J] \begin{bmatrix} X_t \\ Y_n \\ Z_\varphi \end{bmatrix} \quad (\text{A1.3.16.1})$$

$$\begin{bmatrix} X_t \\ Y_n \\ Z_\varphi \end{bmatrix} = [J]^{-1} \begin{bmatrix} X_r \\ Y_r \\ Z_r \end{bmatrix} \quad (\text{A1.3.16.2})$$

A1.2.3 Etablissement des équations de transferts dans la couche limites

Ce paragraphe a pour objectif d'établir les équations gouvernant les phénomènes de transfert dans la couche limite en utilisant les relations concernant les opérateurs aux dérivées partielles présentés dans le paragraphe A1.1 de cette annexe qui interviennent dans les lois physiques régissant les phénomènes.

Par souci de clarté dans les calculs, nous désignons par x la coordonnée curviligne s . Dans le cas du système considéré, on a :

$$\begin{aligned} q_1 &= x, \quad q_2 = y, \quad q_3 = \varphi \\ h_1 &= 1, \quad h_2 = 1, \quad h_3 = r \end{aligned} \quad (\text{A1.3.17})$$

1 Equation de continuité

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{V}) \\ r = R \sin \theta \end{aligned} \quad (\text{A1.3.18.1})$$

pour $0 \leq \theta \leq 2\pi$

En régime stationnaire $\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0\right)$

$$\overrightarrow{\text{div}} \vec{V} = 0 \quad (\text{A1.3.18.2})$$

Les relations (A1.3.2), (A1.3.3) et (A1.3.9) nous permettent d'écrire :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{div}} \vec{V} &= \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(rV_x)}{\partial x} + \frac{\partial(rV_y)}{\partial y} + \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} \right] \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial(rV_x)}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial(rV_y)}{\partial y} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} \\ \overrightarrow{\text{div}} \vec{V} &= \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + V_x \frac{dr}{dx} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} \end{aligned} \quad (\text{A1.3.18.3})$$

Alors, l'équation de continuité :

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + V_x \frac{dr}{dx} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} = 0 \quad (\text{A1.3.18.4})$$

2 Equation de la quantité de mouvement

L'équation générale de bilan de quantité de mouvement s'écrit :

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \overrightarrow{\text{grad}} P + \vec{F} + \nu [\Delta \vec{V} + \overrightarrow{\text{grad}} (\text{div} \vec{V})] \quad (\text{A1.3.19})$$

Or

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \vec{V} \quad (\text{A1.3.19.1})$$

où $\vec{F}$ est la résultante des forces extérieures qui est considérée nulle dans notre cas où le fluide est en écoulement forcé.

Et d'autre part, compte tenu de l'équation de continuité et que l'écoulement est permanent, l'équation (A1.3.4) connaissant (A1.3.5) se réduit à :

$$\vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \vec{V} = -\frac{1}{\rho} \overrightarrow{\text{grad}} P + \nu \Delta \vec{V} \quad (\text{A1.3.19.2})$$

Ou encore, d'après (A1.3.4) nous avons :

$$\vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \vec{V} = \begin{cases} V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{V_\varphi}{r} \frac{\partial V_x}{\partial \varphi} - \frac{V_\varphi^2}{r} \frac{dr}{dx} \\ V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{V_\varphi}{r} \frac{\partial V_y}{\partial \varphi} \\ V_x \frac{\partial V_\varphi}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_\varphi}{\partial y} + \frac{V_\varphi}{r} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{V_x V_\varphi}{r} \frac{dr}{dx} \end{cases} \quad (\text{A1.3.19.3})$$

$$\overrightarrow{\text{grad}} P = \frac{\partial P}{\partial x} \vec{e}_t + \frac{\partial P}{\partial y} \vec{e}_n + \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi \quad (\text{A1.3.19.4})$$

$$\Delta \vec{V} = \left[-\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{r} \left(\frac{\partial V_x}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial x} (r V_\varphi) \right) \right) \right] \vec{e}_t + \left[-\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial V_\varphi}{\partial y} - \frac{1}{r} \frac{\partial V_y}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial x} \left(r \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) \right) \right] \vec{e}_n + \left[-\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \left(\frac{\partial V_x}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial x} (r V_\varphi) \right) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial V_\varphi}{\partial y} - \frac{1}{r} \frac{\partial V_y}{\partial \varphi} \right) \right] \vec{e}_\varphi \quad (\text{A1.3.19.5})$$

Du fait que, dans la couche limite, les dérivées des vitesses par rapport à y sont

Et que d'une part, nous admettons que le terme $\frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2}$ est petit comparé à $\frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2}$ et $\frac{\partial^2 V_\varphi}{\partial y^2}$, du fait que V_y est beaucoup plus petit que V_x , alors on a :

Suivant x :

$$V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{V_\varphi}{r} \frac{\partial V_x}{\partial \varphi} + \frac{V_\varphi^2}{r} \frac{dr}{dx} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2}$$

Suivant φ :

$$V_x \frac{\partial V_\varphi}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_\varphi}{\partial y} + \frac{V_\varphi}{r} \frac{\partial V_x}{\partial \varphi} + \frac{V_x V_\varphi}{r} \frac{dr}{dx} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{r \partial x} + \nu \frac{\partial^2 V_\varphi}{\partial y^2}$$

3 Equation de la chaleur

L'équation de bilan d'énergie s'écrit, en toute généralité :

$$\rho C_p \frac{dT}{dx} = -\text{div}(\vec{q}_c + \vec{q}_r) + P + \phi_D + \beta T \frac{dP}{dt}$$

Avec,

$\vec{q}_c$: vecteur flux surfacique de conduction,

$\vec{q}_r$: vecteur flux surfacique de rayonnement,

P : puissance volumique des sources de chaleur éventuelle nulle dans notre cas,

ϕ_D : fonction de dissipation due au frottement visqueux,

$\beta T \frac{dP}{dt}$: terme adiabatique réversible correspondant à la compressibilité du fluide,

β étant le coefficient d'expression thermique et ce terme est négligeable en écoulement incompressible.

La densité de flux de chaleur par la loi Fourier est donnée par la relation :

$$\vec{q}_c = -A \overrightarrow{\text{grad}} T \quad (\text{A1.3.20})$$

En tenant compte des hypothèses posées au début de notre étude, l'équation (A1.3.12) est ramenée à l'équation suivante :

$$\phi c_p \vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} T = \text{div}(A \overrightarrow{\text{grad}} T) = A \Delta T$$

Ou encore

$$\vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} T = a \cdot \Delta T \quad (\text{A1.3.21})$$

Où $a = \frac{\lambda}{\rho c_p}$ est la diffusivité thermique du flux.

En effet, nous avons :

$$\vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} T = V_x \frac{\partial T}{\partial x} + V_y \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{V_y}{r} \frac{\partial T}{\partial y} \quad (\text{A1.3.22})$$

L'équation (A1.2.4) nous permet d'écrire la relation suivante :

$$\Delta T = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(r \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(r \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right) \right] \quad (\text{A1.3.23})$$

En portant les équations (A1.3.22) et (A1.3.14) dans l'équation (A1.3.21) et en supposant, comme pour les composantes de vitesse, que la dérivée de la température par rapport à x est beaucoup plus faible que la dérivée par rapport à y, alors :

$$V_x \frac{\partial T}{\partial x} + V_y \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{V_y}{r} \frac{\partial T}{\partial y} = a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (\text{A1.3.24})$$

Forced and Rotary Convection around a Cone of Revolution

Christine LETICIA^{1*}, Ulrich CANISSIUS² and Edouard ALIDINA¹

¹Laboratoire de Mécanique des Fluides et Systèmes Energétiques Appliqués (MFSEA), Faculté des Sciences, Université d'Antsirana, B.P.O, Antsirana 201, Madagascar

²Laboratoire de Mécanique et de Métrologie, Ecole Normale Supérieure pour l'Enseignement Technique, Université d'Antsirana, Antsirana 201, Madagascar

ABSTRACT: A numerical study of transfers by forced laminar convection around a cone rotating around an inclined axis of revolution is presented. The flow, of the boundary layer type, is ascending vertical and the fluid considered is Newtonian. The speed outside the boundary layer is determined by [7]. Using a numerical model, the continuity, Navier-Stokes and energy conservation equations are solved by an implicit finite difference method. The influence of the rotation parameter B on transfers is analyzed. The results are presented by the temperatures profiles, the meridian velocity, the normal velocity, the Nusselt number and as well as the meridian friction coefficient.

KEYWORDS: three-dimensional forced and rotary convection, three-dimensional boundary layer, cone of revolution, heat transfer, numerical study.

Date of Submission: 28-10-2020

Date of acceptance: 09-11-2020

Nomenclature

Roman letter

a	thermal diffusivity of fluid, ($\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$)
Cf_u	meridian friction coefficient
Cf_w	azimuthal friction coefficient
C_p	specific heat capacity at constant pressure of the fluid, ($\text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$)
C_{for}	predominance coefficient of forced convection
C_{rot}	predominance coefficient of rotatory convection
L	length generative, (m)
N_u	local Nusselt number
Ec	Ekert number
Pr	Prandtl number
r	normal distance from the projected M of a point P of the fluid to the axis of revolution of revolution of the cone, (m)
Re_∞	Reynold number
Re_ω	rotation Reynold number
B	rotation parameter
T	temperature of the fluid, (K)
T_p	temperature of the wall, (K)
T_∞	temperature of the fluid away from the wall, (K)
U_e	modulus of external speed
U_{e_x}, U_{e_ϕ}	components meridian and azimuthal of external speed, ($\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$)
U_∞	flow velocity upstream of the body [$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$]
V_x, V_y, V_ϕ	velocity component in x, y, and ϕ , ($\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$)
x, y	meridian and normal coordinates, (m)

Greek letter

ϕ	azimuthal coordinate, (o)
λ	thermal conductivity, ($\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$)

ω	speed angular rotation of the cone (rad. s ⁻²)
α	angle of inclination, (°)
ν	kinematic viscosity, (m ² s ⁻¹)
θ_0	demi-angle of opening of cone, (°)

Indices / exponents

+ dimensionless variables

I. INTRODUCTION

Although many theoretical and experimental studies have been carried out on convective transfers in the vicinity of a cone of revolution, most of the work only concerns natural or forced convection around a rotating vertical cone [2] or immobile and inclined [7]. The latter studied three-dimensional convective transfers around a cone of revolution closed on its upper part by a spherical cap and inclined with respect to the vertical. He determined the distribution of the velocity outside the boundary layer using the singularity method, and analyzed the influence of the angle of inclination of the cone and the heat transfer in the boundary layer that develops around this cone. Abdallah *et al.* [4] dedicated a numerical study of natural convection around an inclined cone of revolution. Thus, they studied the influence of the inclination angle of the cone on heat transfer. For this work, the objective is to analyze by a numerical simulation, the influence of the speed of rotation on the thermal and dynamic behavior of a laminar flow in forced and rotatory convection around its axis of revolution.

II. THEORETICAL FOUNDATIONS

The physical model considered consists of a vertical cone of revolution, rotating around its axis of revolution and immersed in a forced flow of a Newtonian fluid with an ascending vertical direction (Figure 1).

2.1. Simplifying assumptions

In addition to these considerations and the classic boundary layer assumptions, we make the following additional assumptions:

- the cone rotating around the axis of revolution,
- transfers are three-dimensional, laminar and permanent,
- transfers by radiation and dissipation of viscous energy are negligible,
- the fluid is air, the physical properties of which are assumed to be constant.

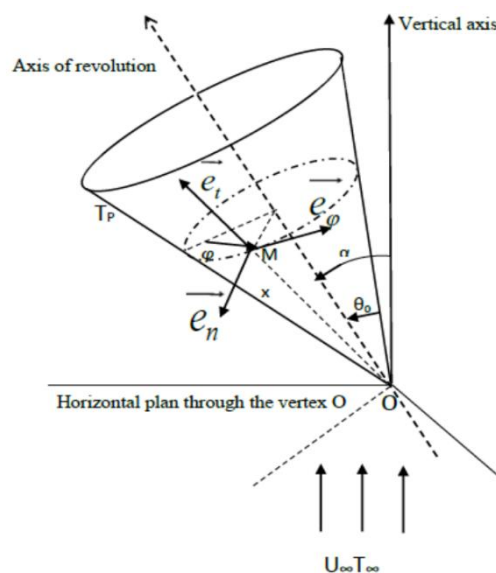


Figure 1. physical model and co-ordinates system

2.2. Conservation equations in the boundary layer

The reference sizes

$$\begin{aligned}x_+ &= \frac{x}{L} y_+ = \frac{y}{L} \sqrt{Re_\infty} C_1 \varphi_+ = \varphi r_+ = \frac{r}{L} \\ V_x^+ &= \frac{V_x}{U_\infty} C_2 V_y^+ = \frac{V_y}{U_\infty} \sqrt{Re_\infty} C_3 V_\varphi^+ = \frac{V_\varphi}{U_\infty} C_2 Ue^+ = \frac{U_e}{U_\infty} C_4 \\ Ue_x^+ &= \frac{Ue_x}{U_\infty} Ue_\varphi^+ = \frac{Ue_\varphi}{U_\infty} T^+ = \frac{(T - T_\infty)}{\frac{1}{2} \frac{U_\infty^2}{C_p}} C_5\end{aligned}$$

With:

$$\begin{aligned}C_1 &= \frac{C_{for} + B^{\frac{1}{2}} C_{rot}}{C_{for} + C_{rot}} C_3 = \frac{C_{for} + B^{-\frac{1}{2}} C_{rot}}{C_{for} + C_{rot}} C_5 = \frac{C_{for} + B^{-2} C_{rot}}{C_{for} + C_{rot}} \\ C_2 &= \frac{C_{for} + B^{-1} C_{rot}}{C_{for} + C_{rot}} C_4 = \frac{C_{for} + B^{-1} Re_\omega^{\frac{1}{2}} C_{rot}}{C_{for} + C_{rot}} \\ B &= \frac{Re_\omega}{Re_\infty} : \text{Rotation parameter}\end{aligned}$$

$$Re_\omega = \frac{\omega L^2}{\nu} : \text{Rotating Reynold number}$$

Moreover, in order to highlight the individual or simultaneous contributions of a predominance, it is possible to associate respectively with each of these convections the points Cfor and Crot according to the type of the corresponding convection.

• Equation of continuity

$$\frac{\partial V_x^+}{\partial x_+} + \frac{C_1 C_2}{C_3} \frac{\partial V_y^+}{\partial y_+} + \frac{V_x^+}{r^+} \frac{dr^+}{dx_+} + \frac{1}{r^+} \frac{\partial V_\varphi^+}{\partial \varphi_+} = 0 \quad (1)$$

• Momentum equations

$$V_x^+ \frac{\partial V_x^+}{\partial x_+} + \frac{C_1 C_2}{C_3} V_y^+ \frac{\partial V_x^+}{\partial y_+} + \frac{V_\varphi^+}{r^+} \frac{\partial V_x^+}{\partial \varphi_+} - \frac{V_\varphi^{+2}}{r^+} \frac{\partial r^+}{\partial x_+} = \frac{C_2^2}{C_4^2} Ue^+ \frac{\partial U_e^+}{\partial x_+} + C_2 C_1^2 \frac{\partial^2 V_x^+}{\partial y_+^2} \quad (2)$$

$$V_x^+ \frac{\partial V_\varphi^+}{\partial x_+} + \frac{C_1 C_2}{C_3} V_y^+ \frac{\partial V_\varphi^+}{\partial y_+} + \frac{V_\varphi^+}{r^+} \frac{\partial V_\varphi^+}{\partial \varphi_+} + \frac{V_\varphi^+ V_x^+}{r^+} \frac{\partial r^+}{\partial x_+} = \frac{C_2^2}{C_4^2} \frac{Ue^+}{r^+} \frac{\partial U_e^+}{\partial \varphi_+} + C_2 C_1^2 \frac{\partial^2 V_\varphi^+}{\partial y_+^2} \quad (3)$$

With:

$$Ue = \sqrt{Ue_x^2 + Ue_\varphi^2} : \text{Modulus of external speed [7]}$$

$$Ue_x = U_\infty (A_\varphi \sin \alpha \sin \varphi) \quad (4)$$

$$Ue_\varphi = U_\infty (A_x \cos \alpha + B_x \sin \alpha \cos \varphi) \quad (5)$$

$$A_x(x) = 0,68 + 3,0329x - 25,44074x^2 + 121,069x^3 + 318,64541x^4 + 466,99471x^5 - 356,01959x^6 + 110,24752x^7$$

$$B_x(x) = -0,80834 + 2,69424x - 21,37757x^2 + 98,83137x^3 - 252,98221x^4 + 363,05621x^5 - 272,50282x^6 + 83,5337x^7$$

$$A_\varphi = 2,3181 - 2,29665x + 5,87104x^2 - 10,90766x^3 + 10,3346x^4 - 4,06092x^5$$

• Heatequation

$$V_x^+ \frac{\partial T^+}{\partial x_+} + \frac{C_1 C_2}{C_3} V_y^+ \frac{\partial T^+}{\partial y_+} + \frac{V_\varphi^+}{r^+} \frac{\partial T^+}{\partial \varphi_+} = C_2 C_1^2 \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 T^+}{\partial y_+^2} \quad (6)$$

$$\text{With } Pr = \frac{\mu C_p}{\lambda} = \frac{\nu}{a} : \text{Prandtl number}$$

2.3. Boundary conditions:

On the wall: $y=0$

$$T^+ = +1 \quad V_x^+(x_+, 0, \varphi_+) = 0$$

$$V_y^+(x_+, 0, \varphi_+) = 0 \quad V_\varphi^+(x_+, 0, \varphi_+) = r^+ C_2 \quad (7)$$

Away from the wall: $y \rightarrow \infty$

$$T^+(x_+, y_+, \varphi_+) \rightarrow 0$$

$$V_x^+(x_+, y_+, \varphi_+) \rightarrow \frac{C_2}{C_4} Ue_x^+ V_\varphi^+(x_+, y_+, \varphi_+) \rightarrow \frac{C_2}{C_4} Ue_\varphi^+ \quad (8)$$

2.4. Nusselt number and friction coefficients

a. Nusselt number

$$2 C_5 C_1^{-1} Ec^{-1} Re_\infty^{-\frac{1}{2}} Nu = - \left(\frac{\partial T^+}{\partial y_+} \right)_{y_+=0} \quad (9)$$

With:

$$Re_\infty = \frac{U_\infty L}{\nu} : \text{Reynolds number}$$

$$Ec = \frac{U_\infty^2}{C_p \Delta T} : \text{Ecker number}$$

b. Friction coefficients

$$\frac{1}{2} C_2 C_1^{-1} Re_\infty^{-\frac{1}{2}} C_f u = \left(\frac{\partial V_x^+}{\partial y^+} \right)_{y^+=0} ; \quad \frac{1}{2} C_2 C_1^{-1} Re_\infty^{-\frac{1}{2}} C_f w = \left(\frac{\partial V_\varphi^+}{\partial y^+} \right)_{y^+=0} \quad (10)$$

III. NUMERICAL SOLUTION

The flow studied is three-dimensional and stationary around the cone. We take as mesh of the network of finite number $L \times M \times N$ stacks of elementary curvilinear parallelepipeds attached to the body and defined by the steps Δx_+ , Δy_+ , $\Delta \varphi_+$ where Δx_+ is the dimensionless step of the curvilinear abscissa, Δy_+ the dimensionless step of the normal coordinate and $\Delta \varphi_+$ the dimensionless step of the azimuthal coordinate. L , M and N are respectively the maximum registration indices along the curvilinear abscissa x , the normal coordinate y and the azimuthal coordinate φ . L and N directly related to the geometrical discretization of the body. As for M , it characterizes the thickness of the boundary layer which is not known a priori and which changes from one stack to another.

The value of the physical quantity $G = G(x_+, y_+, \varphi_+)$ at the point (i, j, k) is noted $G_{i,j}^k$

As for the dimensionless normal component is calculated from the continuity equation:

$$V_{i+1,j+1}^k = \frac{4V_{i+1,j}^k}{3} - \frac{V_{i+1,j-1}^k}{3} - \frac{2}{3} \Delta y_+ \left[\frac{U_{i+1,j}^k U_{i,j}^k}{\Delta x_+} + \frac{W_{i+1,j}^{k+1} - W_{i+1,j}^{k-1}}{r_{i+1}^+ (2\Delta \varphi_+)} + \frac{U_{i+1,j}^k}{\Delta x_+} \left(\frac{r_{i+1}^+ - r_i^+}{r_{i+1}^+} \right) \right] \quad (11)$$

The values of $V_{i+1,j+1}^k$ are calculated step by step by increasing values of j from the wall characterized by $j = 1$.

Solving algorithm

Each of these systems of equations associated with the boundary conditions and given by the equations, taken individually, can be written in the form:

$$A_j G_{j-1} + B_j G_j + C_j G_{j+1} = D_j, \quad 2 \leq j \leq J_{\max} \quad (12)$$

We proceed like Raminosa [8] and Alidina [9] who proposed by evaluating V_x^+ , V_y^+ , V_φ^+ respectively at nodes $[V_x^+]_{i+1}^k$, $[V_y^+]_{i+1}^k$ and $[V_\varphi^+]_{i+1}^k$. This technique allows more reliable results to be obtained despite the sometimes very long execution time caused by the iterations that are required.

To lighten the notations, we pose:

$$U = V_x^+; \quad V = V_y^+; \quad W = V_\varphi^+; \quad Ve = Ue^+; \quad T = T^+ \quad (13)$$

$$\text{The convergence criterion is } \left| \frac{G_{i+1,j}^{k(n)} - G_{i+1,j}^{k(n-1)}}{\max(G_{i+1,j}^{k(n)}, G_{i+1,j}^{k(n+1)})} \right| \leq \varepsilon, \quad G = T, U, W \quad (14)$$

IV. RESULTS AND DISCUSSION

In this paper, we study the axisymmetric case and we fix $Pr = 0.7$, $\Delta x = 0.071428$, $\Delta y = 0.0001$, $L = 1m$, $Re_\infty = 3000$ et $\theta_0 = 20^\circ$, $\alpha = 0^\circ$.

$I_p = 2, 5, 7, 9, 11, 12$ and 13 , corresponds respectively to $x_+ = 0.0714, 0.2857, 0.4286, 0.5714, 0.7143, 0.7857$ and 0.8571 .

Figures 2 and 3, illustrating the variations of the dimensionless temperature T^+ as a function of y_+ . On the one hand, at the wall, its value is maximum and is a decreasing function of y_+ and on the other hand, it decreases as it moves away from the wall. In addition, if the coefficient B is large or the speed of the cone increases and far from the apex O , the radius of the cone is greater, then the variation in temperature is lower and this as y_+ increases because of the speed of rotation of the cone and of fluid in forced convection, the heat could not be suitably transmitted by convection of particles which surround them and so on. This phenomenon is more marked for more distant particles. Moreover, we notice that the further we move away from the vertex O , the value of B seems more important.

Figure 4 illustrates the temperature variation curves as a function of x_+ for $\varphi = 60^\circ$ for several values of B . It is observed that, for y_+ fixed, the temperature field is practically uniform on the wall except at the top. The curves in figures 5 and 6 show the meridian component of the velocity varies linearly in the boundary layer along the normal to the wall and that the thickness of the boundary layer changes very rapidly along the wall. However, close to the wall the effect of the speed of rotation of the cone and fluid in forced convection disrupts the flow. We also notice that far from the wall, the speed of rotation of the cone has no effect, only the speed of the fluid present there. Close to the wall, the further away from the top of the cone, the radius increases, the coefficient of rotation B becomes important, in other words, the speed of rotation increases, and that consequently the meridian component is less important because of the speed of the fluid. Figure 7 shows us the meridian component is uniform over the circumference of the cone.

Figures 8 and 9 illustrating the variations of the dimensionless normal component V_y^+ as a function of y_+ , show us that the fluid is sucked in by the wall.

Figure 10 illustrates the variations of the local Nusselt number against x^+ , for several values of B . The results show that the heat exchange between the wall and the fluid takes place in a practically uniform manner along the surface of the cone, with the exception of the leading edge where the disturbance of the flow causes the exchange to decrease slightly of heat on the less exposed side. We give in Figure 11 the variations of the meridian parietal friction coefficient against x^+ , for several values of B . It shows the wall tension is maximum near the ends of the cone, the site of strong flow disturbance.

V. CONCLUSION

We carried out a numerical study of the flow and heat transfer in the boundary layer developed around a cone rotating around its axis of revolution and plunged into an ascending vertical forced flow. The transfer equations were solved by an implicit finite difference scheme. The results show in particular that the rapid variation in the rotational speed of the body generates a strong disturbance of the flow in the vicinity of the contact circumference and that the evolution of the external speed field is complex. This evolution is justified by the wall friction coefficient along the meridian line. The influence analysis of the rotational speed is represented by the rotation parameter B and the study is carried out within the framework of axisymmetric flow ($\alpha = 0$). The perspective and the limit of this work are based on mixed convection: rotary, forced, natural and the variation of the angle of inclination and as well as the opening at the top of this cone.

ACKNOWLEDGEMENTS

Authors would like to thank the science faculty and higher normal school ENSET of the Antsiranana University for the realization of this study. Authors wish also to thank the contribution of Journal AJER for the publication this paper.

REFERENCES

- [1] F. A. RAKOTOMANGA and E. ALIDINA, Transfert thermiques convectifs tridimensionnels autour d'un cône de révolution, *Congres Français de Thermique*, 2013, Gérardmer, France.
- [2] G. BEZANDRY, R. RANDRIANARIVELO, U. CANISSIUS and E. ALIDINA, Etude numérique de la convection rotatoire pure autour d'un cône de révolution, *Rev. Ivoir. Sci. Technol.*, 29, (2017)1 – 15.
- [3] U. CANISSIUS, F. A. RAKOTOMANGA and E. ALIDINA, Etude numérique de la convection naturelle tridimensionnelle d'un cône de révolution incliné, *Afrique SCIENCE*, 11(1), (2015) 1 – 11.
- [4] M. ABDALLAH and B. ZEGHMATI, Natural Convection Heat and Mass Transfer in the Boundary Layer along a Vertical Cylinder with Opposing Buoyancies, *Journal of Applied Fluid Mechanics*, 4(4), (2011)15 – 21.
- [5] Ch. R. R. RAMINOSOA, M. DAGUENET, Convection mixte autour d'une sphère. Influence de la variabilité des propriétés physiques du fluide, *Revue Générale de Thermique*, 1994.
- [6] A. ALI CHERIF, Ch. R. R. RAMINOSOA, M. RAKOTOMALALA, A. DAÏF et M. DAGUENET, Contrôle hydrodynamique des couches limites thermiques en convection mixte autour d'ellipsoïdes aplatis asymétriques, *Elsevier Science Ltd.*, 1996.
- [7] FRANÇOIS D'ASSISE RAKOTOMANGA, Contribution à l'étude des transferts thermiques convectifs tridimensionnels autour d'un cône de révolution. *Doctoral Thesis*, Antsiranana University, Madagascar, (2013) 134p.
- [8] Ch. R. R. RAMINOSOA, Convection mixte a propriétés physiques variables autour d'un corps a symétrie de révolution, *Doctoral Thesis*, Antananarivo University, Madagascar, 1995.
- [9] E. ALIDINA, Contribution à l'étude d'une convection mixte tridimensionnelle autour d'un ellipsoïde de révolution dans un écoulement ascendant de fluide newtonien, *State Doctoral thesis*, Antananarivo University, Madagascar, 1997.
- [10] M. S. RAKOTOMALALA, Etude des transferts dans la couche limite entourant un corps a symétrie de révolution tournant dans un fluide en présence d'un écoulement axial et d'une convection naturelle, *State Doctoral thesis*, Nice-Sophia Antipolis University, France, 1994.

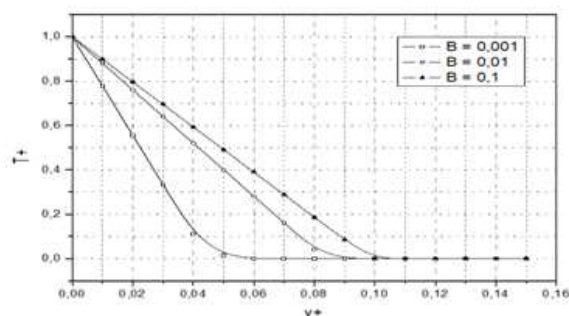


Figure 2: Dimensionless temperature evolution against y_+ for $\theta_0 = 20^\circ$, $\phi = 60^\circ$ and several

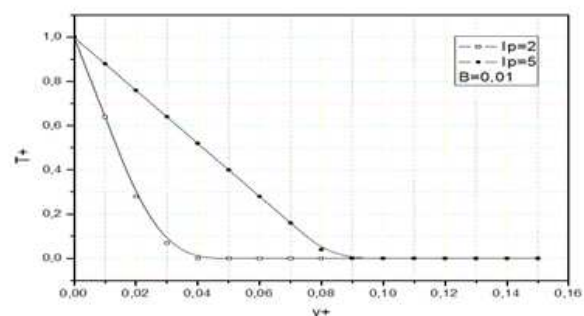


Figure 3: Dimensionless temperature evolution against y_+ for $\theta_0 = 20^\circ$, $\phi = 60^\circ$, $B = 0.1$ and several

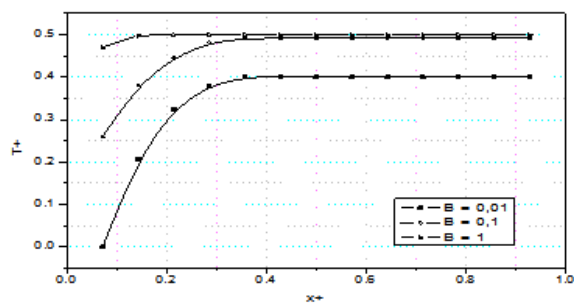


Figure 4: Dimensionless temperature evolution against x_+ for several values of B

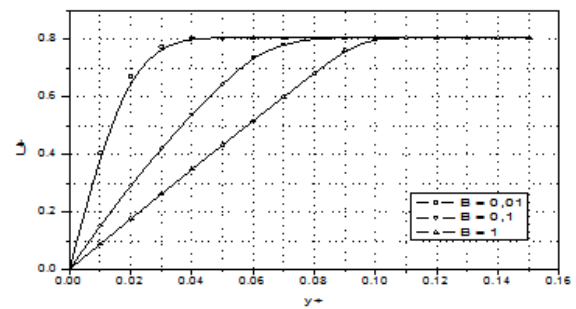


Figure 5: Dimensionless meridional velocity evolution against y_+ for several values of B

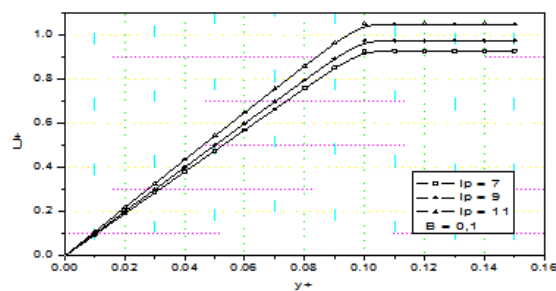


Figure 6: Dimensionless meridional velocity evolution against y_+ for several values of I_p and $B = 0.1$.

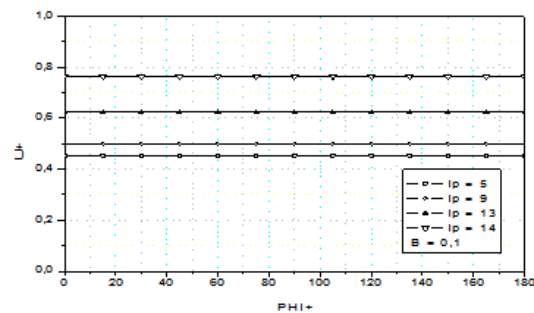


Figure 7: Dimensionless meridional velocity evolution against ϕ for several values of I_p and $B = 0.1$

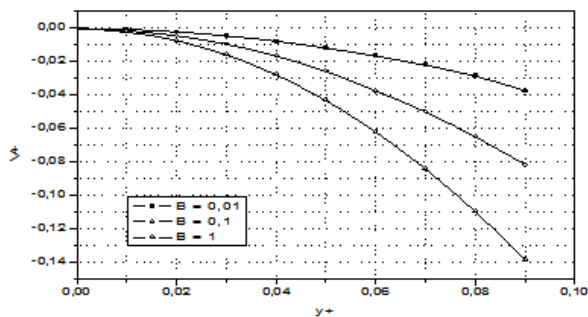


Figure 8: Dimensionless normal velocity evolution against y_+ for several values of B

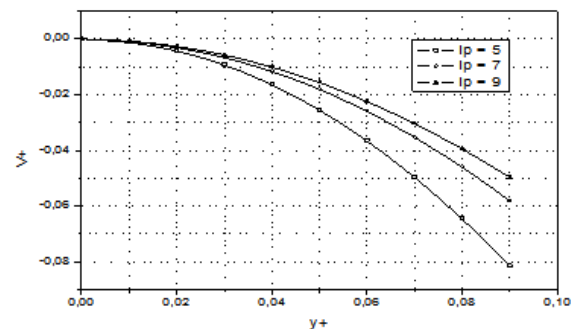


Figure 9: Dimensionless normal velocity evolution against y_+ for several values of I_p .

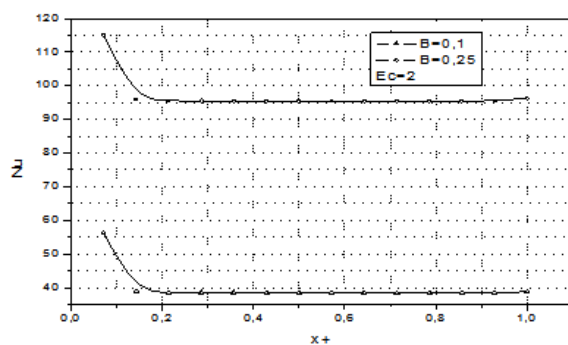


Figure 10: Nusselt number against x_+ for several values of B

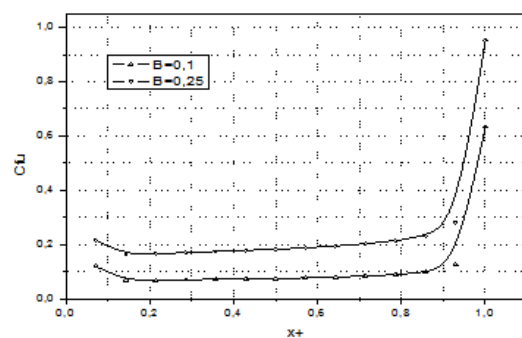


Figure 11: Meridianparietal friction coefficient against x_+ for several values of B

c234567

program couche_limite

C-----

implicit double precision(a-h,o-z)
parameter(npmax = 101, nmmax = 49,jmaxim = 1501)

C-----

dimension U(2,nmmax,jmaxim),V(2,nmmax,jmaxim),W(2,nmmax,jmaxim)
dimension T(2,nmmax,jmaxim),U2(nmmax,jmaxim) ,V2(nmmax,jmaxim)
dimension W2(nmmax,jmaxim),T2(nmmax,jmaxim),X(jmaxim)

dimension UEX(npmax,nmmax),UEP(npmax,nmmax),UEM(npmax,nmmax)
dimension rp(npmax),sp(npmax),phi(nmmax),phid(nmmax),yp(jmaxim)
dimension Jmaxd(nmmax),Jmaxdu(nmmax),Jmaxdw(nmmax),Jmaxdt(nmmax)

logical propu,propv,propw,propt,propk,propj,prop1,prop2
open(50,file='abscisses_curv_1.txt')
open(51,file='coord_azimutales_1.txt')

open(47,file='ASA.txt')
open(30,file='T_y_ialpha_1.txt')
open(31,file='GradT_x_ialpha_1x.txt')
open(32,file='recherche_maillage_Np.txt')
open(33,file='recherche_maillage_Nm.txt')

open(62,file='UWV_y.txt')
open(63,file='UTW_y.txt')
open(64,file='Nus_Cf_x_phi.txt')
open(65,file='Nus_x.txt')
open(66,file='Cfu_x.txt')

open(67,file='Cfw_x.txt')
open(68,file='V_y_180.txt')
open(70,file='UWV_x_501.txt')
open(71,file='UTW_x_501.txt')
open(72,file='UWV_x_251.txt')
open(73,file='UTW_x_251.txt')
open(74,file='Uc_x_251.txt')
open(75,file='Uc_x_501.txt')
open(76,file='Uc_x_651.txt')
open(77,file='Wc_x_251.txt')
open(78,file='Wc_x_501.txt')
open(79,file='Wc_x_651.txt')
open(80,file='T_x_251.txt')
open(81,file='T_x_501.txt')
open(82,file='T_x_651.txt')
open(83,file='Tdim_x_501.txt')
open(90,file='UTWc_x_phi90.txt')
open(91,file='V_x_251.txt')
open(92,file='V_x_501.txt')

open(93,file='V_x_651.txt')
open(94,file='V_x_801.txt')
open(95,file='U_x_251.txt')
open(96,file='U_x_501.txt')
open(97,file='U_x_651.txt')
open(40,file='W_x_251.txt')
open(41,file='W_x_501.txt')

```

open(42,file='W_x_651.txt')
open(36,file='Cfu_Re_x.txt')
open(37,file='Cfw_Re_x.txt')
open(59,file='vitext_x_phi.txt')
open(60,file='vitext_phi.txt')
open(61,file='vitext_x.txt')
C-----
data Tinf, Tp, xl, dyp / 00.0, 100.0, 1.0, 1.0d-04/
data Reinf,Reome,Pr,Ec / 100.,1500.,0.7,0.1/
data itmax, crot,cfor / 100,1.0,1.0 /

UN  = 1.0
xpi  = 4. * datan(UN)
Tp   = Tp  + 273.15
Tinf = Tinf + 273.15
degrad = xpi / 180.
raddeg = 180. / xpi

continue
Re=Reinf
Reo=Reome
xlref = xl
tetaod = 20.
CONTINUE
tetaor= tetaod*degrad
tetaor=tetaor/2.
C-----

continue

B  =  Reo/Re

CONTINUE
ct  =  cfor + crot
C-----
xc1 =  (dsqrt(Re)*cfor + dsqrt(Reo)* crot) / ct
xc2 =  (cfor*(1./Re) +(1./Reo) * crot) / ct
xc3 =  (dsqrt(Re) *cfor + (Re/dsqrt(Reo))* crot) /ct
xc4 =  (cfor + (Re*dsqrt(Re)/Reo) * crot)/ct
xc5 =  (1./Ec)*(cfor + ((Re/Reo)**2)* cfor) / ct

C-----
xc12  = xc1* xc1*xc2
xc13  = xc1* xc2 / xc3
xc24  = xc2* xc2 / xc4* xc4

C-----
write(*,801)xc1,xc2,xc3,xc4,xc5,B,Re,Reo,xc12,xc13,xc24
801  format(5(1x,f9.5),2x,f9.4,2(1x,f4.0),3(1x,f9.0))
C -----
C-----
c a) ialpha = 1 : recherche du maillage optimum
c imail = 1 : calcul du gradient de la température pour plusieurs
c  valeurs de Np  c imail = 2 : calcul du gradient de la température pour plusieurs
c  valeurs de Nm  c b) ialpha = 2 : calculs relatifs à la couche limite

```

C-----

C-

C-

C-----

c Gestion des paramètres de contrôle des calculs

C-----

ialpha = 2

imail = 2

C IALPHA=1 ET IMAIL=1 CORRESPOND AUX CALCULS DU SYSTEME POUR ALPHA =0

C----- , -----

C OUVERTURE DES FICHIERS

C

C-----

C-----

10 Continue

C----

rayon= xl !* dsin(tetaor)

C-----

if(ialpha.eq.1) then

alphad = 0.0

if(imail.eq.1) then

np = 15

nm = 49

endif

C----

if(imail.eq.2) then

np = 15

nm = 49

endif

C---

endif

C-----

if(ialpha.eq.2) then

C---

alphad = 0.00

CONTINUE

np = 15

nm = 49

C--

endif

C-----

C-----

C---

C-----

C-----

51 CONTINUE

C----

```

    call PRELIM(xpi,nmmax,npmax,rayon,xlref,tetaor,delphi,dephid,dxp,
&   dyp,dzp,rp,sp,yp,phi,phid,raddeg,jmaxim,Re,xc1,np,nm
&   ,npt)

526 format(2x,'maillage:',1x,i4,' X',i4,/,2x,'dyp  =' ,f9.6,/,
&   2x,'dxp  =' ,f9.6,/,2x,'dephid =' ,f6.2)

C----
    do ip = 1,np
        write(50,56) npt,tetaod,ip,sp(ip)
56 format(1x,i3,1x,f3.0,2x,i2,2x,f6.3)
    enddo
        write(50,99)
C--
    do im = 1,nm
        write(51,57) nm,tetaod,im,phid(im)
57 format(1x,i3,1x,f3.0,2x,i2,2x,f5.1)
    enddo
        write(51,99)
* pause
C-----
C-----
20 Continue
    alphas = degrad * alphas
C-----
    call VITEX(UEX,UEP,UEM,sp,phi,npmax,nmmax,alphas,np,nm)
C-----
    nmsur2 = nm/2 + 1
    nmsur4 = nm/4 + 1
    npsur2 = np/2 + 1
C----
C    do 3 i = 1,npt
    do 3 i = 1,np
        do 4 k = 1,nmsur2,2
            write(59,180) tetaod,alphad,i,k,sp(i),phid(k),
&   UEX(i,k),UEP(i,k),UEM(i,k)
4 continue
3 continue
C----
    do k = 1,nmsur2,2
        write(60,180) tetaod,alphad,npsur2,k,sp(npsur2),phid(k),
&   UEX(npsur2,k),UEP(npsur2,k),UEM(npsur2,k)
        enddo
C----
        do i = 1,np

            write(61,181) tetaod,alphad,nmsur4,i,phid(nmsur4),sp(i),
&   UEX(i,nmsur4),UEP(i,nmsur4),UEM(i,nmsur4)
            enddo
C----
180 format(2(1x,f3.0),2(1x,i3),1x,f6.4,1x,f4.0,3(1x,f9.5))
181 format(2(1x,f3.0),2(1x,i3),1x,f4.0,1x,f6.4,3(1x,f9.5))
C-----C-----
C-

```

```

        lpmax = np - 1
        lpo = 1
c-
c-----
c-----
c=====
c
c Debut des calculs
c
c=====
        jmax = 10
c-----
c----
        do k = 1,nm
            Jmaxd(k) = jmax
            Jmaxdu(k) = jmax
            Jmaxdw(k) = jmax
            Jmaxdt(k) = jmax
        enddo
c-----
c-----
c-
        lp = lpo + 1
        21 continue
c-----
c----
        call INITIA(U,V,W,T,U2,V2,W2,T2,nmmax,jmaxim,ip,nm)
c-----
        do k=1,nm
            ipp1 = ip + 1
            ri = rp(ipp1)
            rip1 = rp(ip)
            Coefr1 = 1. - ri/rip1
c        Write(*,*) 'k=',k,'ip=',ip,'rip1=',rip1
        end do
c----

        call CLFIXE(U,V,W,T,nmmax,jmaxim,nm,np,ip,rip1,B)
c-----
        j= 1
c-----
        do k=1,nm
            Write(*,*) 'lp=',lp, 'K=',K,'W(2,k,1)=' ,w(2,k,1),'B=' ,B,
            & 'xc2=' ,xc2
        end do
c-----
c-----
        iter = 0
        do k=1,nm
            end do
c-----
        31 continue
c-----
        do 52 k = 1,nm

```

```

C--
      JK = Jmaxd(k)
      do 53 j = 1,JK
      if(iter.ne.0) then
C----
          U2(k,j) = U(2,k,j)
          V2(k,j) = V(2,k,j)
          W2(k,j) = W(2,k,j)
          T2(k,j) = T(2,k,j)
C----
          endif
C-----
      53 continue
      52 continue

      do k=1,nm

      end do

C-----
c   write(*,*)'EREU'
C-----
      kfinal = nm
C-
      do 2 k = 1,kfinal
C-----
C-----
      Nexpt = 1
      Nexpu = 1
      Nexpw = 1
C-----
      41 continue
      jmaxm1 = jmax - 1
C--
C----
      if(k.eq.1 ) km1 = kfinal - 1
      if(k.ne.1 ) km1 = k - 1
      if(k.eq.kfinal) kp1 = 2
      if(k.ne.kfinal) kp1 = k + 1
C----
      call CLJMAX(U,W,T,UEX,UEP,ip,k,jmax,npmax,nmmax,jmaxim,xc24)
C=====
c Calcul de la composante tangentielle U
C=====
C--

C-----
      call FACTOU(X,U,V,W,UEM,ip,k,ipm1,kp1,km1,dxp,delphi,dyp,
      & rip1,Coefr1,npmax,nmmax,jmaxim,jmaxm1,jmax,xc12,xc13,
      & xc24)
C--
      do j = 1 ,jmax
      U(2,k,j) = X(j)
      enddo
C--

```

```

C=====
c Calcul de la composante orthoradiale W
C=====
C--

      call FACTOW(X,U,V,W,UEM,ip,k,kp1,km1,dxp,delphi,dyp,
&    rip1,Coefr1,npmax,nmmax,jmaxim,jmaxm1,jmax,xc12,xc13,xc24)

C--
      do j = 1 ,jmax
        W(2,k,j) = X(j)
      enddo

C--
C=====
c Calcul de la température T
C=====
C--

      call FACTOT(X,U,V,W,T,k,kp1,km1,dxp,delphi,dyp,rip1,Pr,nmmax,
&    jmaxim,jmaxm1,jmax,xc12,xc13)

C--
      do j = 2 ,jmaxm1
        T(2,k,j) = X(j)
      enddo

C=====
c Calcul de la composante normale V
C=====
      call CalcuV(U,V,W,k,kp1,km1,dxp,delphi,dyp,rip1,coefr1,nmmax,
&    jmaxim,jmaxm1,xc13)

C-----
C=====
c Exploration de la couche limite hydrodynamique et thermique
C=====

      call EXPLOR(U,W,T,ip,k,jmax,npmax,nmmax,kfinal,jmaxim,Tp,
&    Tinf,UEx,UEP, Nexpt,Nexpu,Nexpw,Nexplo,jmaxd,
&    jmaxdt,jmaxdu,jmaxdw,nm)

C-----
C-
      if(Nexplo.eq.0) then
        jmax = jmax + 1
        do j = 1,jmaxim
          U2(k,j) = U(2,k,j)
          W2(k,j) = W(2,k,j)
          V2(k,j) = V(2,k,j)
          T2(k,j) = T(2,k,j)
        enddo
        if(jmax.le.jmaxim) then
          Goto 41
        else
          write(*,221)ip,k
          221 format(/,2x,'jmaxim est depasse',/,2x,'ip=',i2,2x,'k=',i2)
          stop
        endif
      endif

C---
      endif

C-----

```

```

        if(Nexplo.eq.1) then
            jmax = jmaxd(k)
        endif
C-----
C-----
C--
    2 continue
C--

C-----
c Test de precision
C-----
C----
    do 32 k = 1,kfinal
        JKM1 = Jmaxd(k) - 1
    do 33 j = 2,JKM1
C-----
        Xdenu = dmax1(dabs(U(2,k,j)),dabs(U2(k,j)))
        Xdent = dmax1(dabs(T(2,k,j)),dabs(T2(k,j)))
        Xdenv = dmax1(dabs(V(2,k,j)),dabs(V2(k,j)))
        Xdenw = dmax1(dabs(W(2,k,j)),dabs(W2(k,j)))
C-----
        if(Xdenu.lt.1.0d-06) then
            Erv = 0.0
        else
            Erv = dabs(dabs(U(2,k,j)) - dabs(U2(k,j)))/Xdenu
        endif
C-----
        if(Xdenv.lt.1.0d-06) then
            Erv = 0.0
        else
            Erv = dabs(dabs(V(2,k,j)) - dabs(V2(k,j)))/Xdenv
        endif
C-----
        if(alphad.eq.0.0) then
            Erw = 0.0
        else
            if(k.eq.1.or.k.eq.nmsur2.or.k.eq.kfinal) then
                Erw = 0.0
            else
C--
                if(Xdenw.lt.1.0d-06) then
                    Erw = 0.0
                else
                    Erw = dabs(dabs(W(2,k,j)) - dabs(W2(k,j)))/Xdenw
                endif
C--
            endif
        endif
C-----
        if(Xdent.lt.1.0d-06) then
            Ert = 0.0
        else
            Ert = dabs(dabs(T(2,k,j)) - dabs(T2(k,j)))/Xdent
        endif

```

```

C-----
C-----
      propu = Eru.lt.1.0d-03
      propv = Erv.lt.1.0d-03
      propw = Erw.lt.1.0d-03
      propt = Ert.lt.1.0d-03
C----
C----
      propk = k.eq.kfinal
      propj = j.eq.JKM1
C-----
      prop1 = propu.and.propv.and.propw.and.propt
      prop2 = propk
C 33 continue
C 32 continue

C----
      if(prop1) then

C-----
      if(prop2) goto 191
C----
      else
C----
      iter = iter + 1
C----
      if(iter.le.itmax) Goto 31
C      WRITE(6,800) iter,W(2,k,j)
      endif

C---

      33 continue
      32 continue

C-----
C-----
      191 continue
C----
C-----
      call SORTIE(tetaod,alphad,ip,sp,yp,phid,U,V,W,T,Re,ialpha,imail,
      &npmax,nmmax,jmaxim,jmaxd,Uex,Uep,dyp,np,nm,alphar,xc1,xc2,Ec,iter)
C-----

C-----
C-----
      if(ialpha.eq.1) then
C  write(80,99)
C  write(81,99)
      endif
C--
      if(ialpha.eq.2) then
C  write(*,99)

```

```

        write(62,99)
        write(63,99)
        write(64,99)
        write(68,99)
C-
C  write(*,98)
*  write(47,98)
    write(70,98)
        write(71,98)
    write(72,98)
    write(73,98)
C-
    endif
C-----
C-----
c Passage à l'abscisse curviligne suivante
C-----
C---
        lp = lp + 1
C---
        if(lp.le.lpmax) GOTO 21
C---
C---
        if(ialpha.eq.1) then
C--
            if(imail.eq.1) then
                np = np + 10
                if(np.le.npmax) goto 51
            endif
C--
            if(imail.eq.2) then
                nm = nm + 6
                if(nm.le.nmmax) goto 51
            endif
C--
        endif
C---
C-----
c Passage à la nouvelle valeur de alpha
C-----
        if(ialpha.eq.2) then
            alphad = alphad + 5.
C--
C  write(50,99)
    write(59,99)
    write(60,99)
    write(61,99)
C--
        write(*,98)
        write(62,99)
        write(63,99)
        write(64,99)
        write(65,99)
        write(66,99)
        write(67,99)

```

```

        write(68,99)
C--
        write(47,98)
        write(70,98)
        write(71,98)
        write(72,98)
        write(73,98)
        write(74,98)
        write(75,98)
        write(76,98)
        write(77,98)
        write(78,98)
        write(79,98)
        write(80,98)
        write(81,98)
        write(82,98)
        write(83,98)
C--
        write(91,98)
        write(92,98)
        write(93,98)
        write(94,98)
C-
        write(95,98)
        write(96,98)
        write(97,98)
C-
        write(42,98)
        write(41,98)
        write(40,98)
C-
        write(36,98)
        write(37,98)
C-
        if(alphad.le.20.) Goto 20
C---
C-----
C-----
        endif
C-
C-----
C-----
        close(61)
        close(60)
        close(59)
        close(37)
        close(36)
        close(42)
        close(41)
        close(40)
        close(97)
        close(96)
        close(95)
        close(94)
        close(93)

```

```

        close(92)
        close(91)
        close(90)
        close(83)
C--
        close(82)
        close(81)
        close(80)
        close(79)
        close(78)
        close(77)
        close(76)
        close(75)
        close(74)
        close(73)
        close(72)
        close(71)
        close(70)
        close(68)
C--
        close(67)
        close(66)
        close(65)
        close(64)
        close(63)
        close(62)
        close(33)
        close(32)
        close(31)
        close(30)
C--
        close(47)
        close(51)
        close(50)
C-----
C-----
99 Format(//)
98 format(/)
C-----
C----
        stop
        end
C----
C=====
C
c FIN DU PROGRAMME PRINCIPAL
C
C=====
C--
        subroutine PRELIM(xpi,nmmax,npmax,rayon,xlref,tetaor,delphi,
                & dephid,dxp,dyp,dzp,rp,sp,yp,phi,phid,raddeg,jmaxim,Re,xc1,
                & np,nm,npt)
C----
        implicit double precision(a-h,o-z)
        dimension phi(nmmax),phid(nmmax),s(npmax),r(npmax),tetar(npmax)

```

```

        dimension sp(npmax),rp(npmax),yp(jmaxim),y(jmaxim),tetad(npmax)
C-----
C   write(*,*) ('1 prelim')
C 900   format('1 prelim')
        xnp = np
        xnp1 = np - 1
        xnm1 = nm - 1
C--
C       deltax = 0.0322
        delphi = 2.* xpi / xnm1
        dephid = delphi * raddeg
        deltaz = rayon * dcos(tetaor)/xnp
        deltax = rayon/xnp1
        dtetao = deltax/rayon
        npdif = dint(tetaor/dtetao) + 1
        npt = np + npdif
C-----
        dxp = deltax/xlref
        dzp = deltaz/xlref
C-----
        do ip = 1,npt
            xipm1 = ip - 1
            s(ip) = xipm1 * deltax
            if(ip.le.np) then
                tetar(ip) = tetaor
                tetad(ip) = tetar(ip) * raddeg *2.
                r(ip) = s(ip) * dsin(tetaor)
            endif
C--
            if(ip.gt.np.and.ip.le.npt) then
                tetar(ip) = tetaor - dfloat(ip - np) * dtetao
                tetad(ip) = tetar(ip) * raddeg *2.
                r(ip) = rayon * dsin(tetar(ip))
            endif
            sp(ip) = s(ip)/xlref
            rp(ip) = r(ip)/xlref
            write(*,56) ip,tetad(ip),tetar(ip),r(ip),sp(ip)
        enddo
56 format(1x,i3,1x,f3.0,3(1x,f6.4))

C-----
C-----
        do k = 1 , nm
            xkm1 = k - 1
C-----
            phi(k) = xkm1 * delphi
            phid(k) = phi(k) * raddeg
C   write(*,85) k,phid(k)
85 format(1x,i4,2x,f6.1)
        enddo
C-----
C-----
        do j = 1,jmaxim
            xjm1 = j - 1
            yp(j) = xjm1 * dyp

```

```

c      y(j) = yp(j) * xlref/dsqrt(Re)
c      y(j) = yp(j) * xlref/(dsqrt(Re) * xc1)
c      enddo

c-----
c-----
C      write(*,*)'2 prelim'
c      return
c      end

c---
C=====
c      Subroutine VITEX(UEx,UEP,UEM,sp,phi,npmax,nmmax,alphar,np,nm)
c-
c*****
c sous programme de calcul de la distribution de la vitesse
c extérieure en utilisant les correlations proposées
c*****
c---
c      implicit double precision(a-h,o-z)
c      dimension UEM(npmax,nmmax),UEx(npmax,nmmax),UEP(npmax,nmmax)
c      dimension phi(nmmax),sp(npmax)

C      write(*,*) ('1 vitex')

c----
c      nmsur2 = nm/2 + 1

c--
c      do 11 ip = 1,npt
c      do 11 ip = 1,np
c      X = sp(ip)

c--
c      do 12 k = 1,nm
c      cosphi = dcos(phi(k))
c      sinphi = dsin(phi(k))

c--
c      if(ip.eq.1.or.ip.eq.npt) then
c      if(ip.eq.1.or.ip.eq.np) then
c      UEX(ip,k) = 0.0
c      UEP(ip,k) = 0.0
c      else

c-
c      UEX(ip,k) = UEXMAX(alphar,X,cosphi,ip,np)
c      UEP(ip,k) = UEPMAX(alphar,X,sinphi,ip,np)

c-
c      endif

c---
c      UEM(ip,k) = dsqrt(UEX(ip,k)**2 + UEP(ip,k)**2)

c--
c      12 continue
c      11 continue

c--
c      return
c      end

C=====
C-----
c      function UEPMAX(alphar,X,sinphi,ip,np)

```

```

        implicit double precision(a-h,o-z)
C-+
        if(ip.lt.np) then
            ao  = 2.3181
            a1  = - 2.29665
            a2  = 5.87104
            a3  = - 10.90766
            a4  = 10.3346
            a5  = - 4.06092
            endif
C----

        Aphi = ao + a1*X**1 + a2*X**2 + a3*X**3 + a4*X**4 + a5*X**5
        UEPMAX = aphi * dsin(alphar) * sinphi
        return
        end
C-
C=====
C-----
        function UEXMAX(alphar,X,cosphi,ip,np)
            implicit double precision(a-h,o-z)
C----
            UEXMAX = Axf(X,alphar,ip,np) + Bxf(X,alphar,ip,np)*cosphi
C--
            return
            end
C=====
C-----
        function Axf(X,alphar,ip,np)
            implicit double precision(a-h,o-z)
C----
            if(ip.lt.np) then
                ao  = 0.68
                a1  = 3.03296
                a2  = - 25.44074
                a3  = 121.069
                a4  = - 318.64541
                a5  = 466.99471
                a6  = - 356.01959
                a7  = 110.24752
C----
                Ax  = ao + a1*X**1 + a2*X**2 + a3*X**3 + a4*X**4 +
                &      a5*X**5 + a6*X**6 + a7*X**7
                endif
C-----
                Axf = Ax * dcos(alphar)
                return
                end
C-----
C-----
        function Bxf(X,alphar,ip,np)
            implicit double precision(a-h,o-z)
C----
            if(ip.lt.np) then
                b0 = - 0.80834

```

```

      b1 = 2.69424
      b2 = - 21.37757
      b3 = 98.83137
      b4 = - 252.98221
      b5 = 363.05621
      b6 = - 272.50282
      b7 = 83.5537
      Bx = b0 + b1*X**1 + b2*X**2 + b3*X**3 + b4*X**4 +
      &    b5*X**5 + b6*X**6 + b7*X**7
      endif

C-----
      Bxf = Bx * dsin(alphar)
C--
      return
      end

C-----
C=====
C
      subroutine CLFIXE(U,V,W,T,nmmax,jmaxim,nm,np,ip,rip1,B)
C  subroutine CLFIXE(U,V,W,T,nmmax,jmaxim,nm)
C-----
C Sous-programme définissant les conditions à la paroi et
C au point d'arrêt ( Ip = 1 )
C-----
      implicit double precision(a-h,o-z)
      dimension U(2,nmmax,jmaxim),W(2,nmmax,jmaxim),T(2,nmmax,jmaxim)
      dimension V(2,nmmax,jmaxim)
C  Write(*,*) 'ip=',ip, 'rip1=',rip1
C-----
C A la paroi
C-----
C  do Ip=1,np
      do 17 k = 1,nm
C----
        w21= B *rip1
C--
        U(1,k,1) = 0.0
        V(1,k,1) = 0.0
        W(1,k,1) = 0.0
        T(1,k,1) = 1.0
C--
        U(2,k,1) = 0.0
        V(2,k,1) = 0.0
        W(2,k,1) = w21
        T(2,k,1) = 1.0

      17 continue
C  enddo
C-----
C Au point d'arrêt
C-----
      do 18 k = 1,nm
        do 19 j = 2,jmaxim
C--

```

```

        U(1,k,j) = 0.0
        V(1,k,j) = 0.0
        W(1,k,j) = 0.0
        T(1,k,j) = 0.0
C--
    19 continue
    18 continue
C----
        return
    end
C--
C=====
        Subroutine INITIA(U,V,W,T,U2,V2,W2,T2,nmmax,jmaxim,ip,nm)
C-----
C-- c Sous programme permettant d'initialiser les grandeurs au début
c des calculs pour tout Ip > 1
C-----
        implicit double precision(a-h,o-z)
        dimension U(2,nmmax,jmaxim),V(2,nmmax,jmaxim),W(2,nmmax,jmaxim)
        dimension T(2,nmmax,jmaxim),U2(nmmax,jmaxim),V2(nmmax,jmaxim)
        dimension W2(nmmax,jmaxim),T2(nmmax,jmaxim)
C-----
        do 28 k = 1,nm
        do 29 j = 2,jmaxim
C-----
            if(ip.eq.2) then
                U(1,k,j) = 0.0
                V(1,k,j) = 0.0
                W(1,k,j) = 0.0
                T(1,k,j) = 0.0
C-
                U(2,k,j) = U(1,k,j)
                V(2,k,j) = V(1,k,j)
                W(2,k,j) = W(1,k,j)
                T(2,k,j) = T(1,k,j)
C-
                U2(k,j) = U(2,k,j)
                V2(k,j) = V(2,k,j)
                W2(k,j) = W(2,k,j)
                T2(k,j) = T(2,k,j)
            else
                U(1,k,j) = U(2,k,j)
                V(1,k,j) = V(2,k,j)
                W(1,k,j) = W(2,k,j)
                T(1,k,j) = T(2,k,j)
C--
                U(2,k,j) = 0.0
                V(2,k,j) = 0.0
                W(2,k,j) = 0.0
                T(2,k,j) = 0.0
C--
                U2(k,j) = U(2,k,j)
                V2(k,j) = V(2,k,j)
                W2(k,j) = W(2,k,j)
                T2(k,j) = T(2,k,j)

```

```

endif
C----
C----
29 continue
28 continue
C-----
return
end
C-
C-----
C*****
subroutine CLJMAX(U,W,T,UEX,UEP,ip,k,jmax,npmax,nmmax,jmaxim,
& xc24)
C subroutine CLJMAX(U,W,T,UEX,UEP,ip,k,jmax,npmax,nmmax,jmaxim)
C--
C-----
c Sous programme definissant les conditions à la frontière de la
c couche limite
C-----
implicit double precision(a-h,o-z)
dimension U(2,nmmax,jmaxim),W(2,nmmax,jmaxim),T(2,nmmax,jmaxim)
dimension UEX(npmax,nmmax),UEP(npmax,nmmax)
C-----
C---
c U(2,k,jmax) = UEX(ip,k)
c W(2,k,jmax) = UEP(ip,k)

U(2,k,jmax) = UEX(ip,k) !* xc24
W(2,k,jmax) = UEP(ip,k) * xc24
T(2,k,jmax) = 0.0d00
C-----
return
end
C
C-----
C
c Les sous programmes de mise en oeuvre de la méthode
c de factorisation
C
C*****

subroutine FACTOU(X,U,V,W,UEM,ip,k,ipm1,kp1,km1,dxp,delphi,dyp,
& rip1,Coefr1,npmax,nmmax,jmaxim,jmaxm1,jmax,xc12,xc13,
& xc24)
C-----
implicit double precision(a-h,o-z)
dimension U(2,nmmax,jmaxim),V(2,nmmax,jmaxim),W(2,nmmax,jmaxim)
dimension UEM(npmax,nmmax),AT(jmaxim),BT(jmaxim),X(jmaxim)
C-----
X(jmax) = U(2,k,jmax)
do j = 2 , jmaxm1
C-----
c a1 = - 1. / (dyp**2)
c a2 = + V(2,k,j) / (2.*dyp)

```

```

a1 = - xc12 * 1. / (dyp**2)
a2 = + xc13 * V(2,k,j) / (2.*dyp)
C-----
Aj = (a1 + a2) * (+1.)
C-----
b1 = xc12 * 2. / (dyp**2)
c    b1 = 2. / (dyp**2)
b2 = U(2,k,j) / dxp
c    b3 = - 2. * V(2,k,j) / dyp
b3 = - 2.*xc13 * V(2,k,j) / dyp
C-----
Bj = (b1 + b2 + b3) * (+1.)
C-----
c1 = - 1.* xc12 / (dyp**2)
c2 = + xc13 * 3. * V(2,k,j) / (2. * dyp)
C    c1 = - 1. / (dyp**2)
C    c2 = + 3. * V(2,k,j) / (2. * dyp)
C-----
Cj = (c1 + c2) * (+1.)
C-----
d1 = U(2,k,j) * U(1,k,j) / dxp
d2 = - W(2,k,j) * (U(2,kp1,j) - U(2,km1,j)) / (2.*rip1 * delphi)
d3 = Coefr1 * W(2,k,j) * W(2,k,j) / dxp
d4 = xc24 * UEM(ip,k) * (UEM(ip,k) - UEM(ipm1,k)) / dxp

c    d4 = UEM(ip,k) * (UEM(ip,k) - UEM(ipm1,k)) / dxp
C-----
Dj = (d1 + d2 + d3 + d4) * (+1.)
C----- C-----
if(j.eq.2)then
AT(j) = - Cj / Bj
BT(j) = ( Dj - Aj * U(2,k,1)) / Bj
else
AT(j) = - Cj / ( Bj + Aj * AT(j-1) )
BT(j) = ( Dj - Aj * BT(j-1) ) / ( Bj + Aj * AT(j-1) )
endif
C-----
C-----
enddo
C----
C----
do j = jmaxm1,2,-1
jp1 = j + 1
X(j) = AT(j) * X(jp1) + BT(j)
enddo
C-----
C-----
return
end
C
C-----
C*****
subroutine FACTOW(X,U,V,W,UEM,ip,k,kp1,km1,dxp,delphi,dyp,
& rip1,Coefr1,npmax,nmmax,jmaxim,jmaxm1,jmax,xc12,xc13,xc24)
C-----

```

```

        implicit double precision(a-h,o-z)
        dimension U(2,nmmax,jmaxim),V(2,nmmax,jmaxim),W(2,nmmax,jmaxim)
        dimension UEM(npmax,nmmax),AT(jmaxim),BT(jmaxim),X(jmaxim)
c-----
        X(jmax) = W(2,k,jmax)
        do j = 2 , jmaxm1
c-----
            a1 = - 1. * xc12 / (dyp**2)
            a2 = xc13 * V(2,k,j) / (2.*dyp)
c-----
            Aj = a1 + a2
c-----
            b1 = 2.* xc12 / (dyp**2)
            b2 = U(2,k,j) / dxp
c            b3 = - 2. * V(2,k,j) / dyp
            b3 = - 2.* xc13 * V(2,k,j) / dyp
            b4 = (W(2,kp1,j) - W(2,km1,j)) / (2.* rip1 * delphi)
            b5 = Coefr1 * U(2,k,j) / dxp

c-----
            Bj = b1 + b2 + b3 + b4 + b5

            c1 = - 1.*xc12 / (dyp**2)
            c2 = + 3.* xc13 * V(2,k,j) / (2. * dyp)
c-----
            Cj = c1 + c2
c-----
            d1 = U(2,k,j) * W(1,k,j) / dxp
            d4 = xc24 * UEM(ip,k)*(UEM(ip,kp1) - UEM(ip,km1)) /
            & (2.*rip1 * delphi)
            Dj = d1 + d4
c-----
c-----
            if(j.eq.2)then
                AT(j) = - Cj / Bj
                BT(j) = ( Dj - Aj * W(2,k,1)) / Bj
            else
                AT(j) = - Cj / ( Bj + Aj * AT(j-1) )
                BT(j) = ( Dj - Aj * BT(j-1) ) / ( Bj + Aj * AT(j-1) )
            endif
c-----
            enddo
c-----
c-----
            do j = jmaxm1,2,-1
                jp1 = j + 1
                X(j) = AT(j) * X(jp1) + BT(j)
            enddo
c-----
            return
            end
c
c-----
c*****

```

```

subroutine FACTOT(X,U,V,W,T,k,kp1,km1,dxp,delphi,dyp,rip1,
& Pr,nmmax,jmaxim,jmaxm1,jmax,xc12,xc13)
C-----
implicit double precision(a-h,o-z)
dimension U(2,nmmax,jmaxim),V(2,nmmax,jmaxim),W(2,nmmax,jmaxim)
dimension T(2,nmmax,jmaxim),AT(jmaxim),BT(jmaxim),X(jmaxim)
C-----
X(jmax) = T(2,k,jmax)
do j = 2 , jmaxm1

a1 = - 1. * xc12 / (Pr * dyp**2)
a2 = + xc13 * V(2,k,j) / (2.*dyp)
C-----
Aj = a1 + a2
C-----
b1 = 2. * xc12/ (Pr * dyp**2)
b2 = U(2,k,j) / dxp
b3 = - 2.* xc13 * V(2,k,j) / dyp
C b3 = - 2.* V(2,k,j) / dyp

C-----
Bj = b1 + b2 + b3
C-----
c1 = - 1.*xc12 / (Pr * dyp**2 )
c2 = + 3.*xc13 * V(2,k,j) / (2. * dyp)

C-----
Cj = c1 + c2
C-----
d1 = U(2,k,j) * T(1,k,j) / dxp
d2 = - W(2,k,j) * (T(2,kp1,j) - T(2,km1,j)) / (2. *rip1 * delphi)
C-----
Dj = d1 + d2
C-----
C-----
if(j.eq.2)then
AT(j) = - Cj / Bj
BT(j) = ( Dj - Aj * T(2,k,1)) / Bj
else
AT(j) = - Cj / ( Bj + Aj * AT(j-1) )
BT(j) = ( Dj - Aj * BT(j-1) ) / ( Bj + Aj * AT(j-1) )
endif
CC-----
C-----
enddo
C-----
C-----
do j = jmaxm1,2,-1
jp1 = j + 1
X(j) = AT(j) * X(jp1) + BT(j)
enddo
C-----
C-----
return
end

```

```

C
C-----
C*****
      subroutine CalcuV(U,V,W,k,kp1,km1,dxp,delphi,dyp,rip1,coefr1,
        &      nmmax,jmaxim,jmaxm1,xc13)
C-----
c sous programme de calcul de la comopsante normale V à partir
c de l'équation de continuité
C-----
      implicit double precision(a-h,o-z)
      dimension U(2,nmmax,jmaxim),V(2,nmmax,jmaxim),W(2,nmmax,jmaxim)
C-----
      do j = 1, jmaxm1
        jp1 = j + 1
C--
        x1 = (U(2,k,j) - U(1,k,j)) / dxp
        x2 = (W(2,kp1,j) - W(2,km1,j)) / (2. * rip1 * delphi)
        x3 = Coefr1 * U(2,k,j) / dxp
C--
        V(2,k,jp1) = V(2,k,j) - (x1 + x2 + x3) * dyp /xc13

      enddo
C-----
C-----
      return
      end
C
C-----
C*****
      subroutine EXPLOR(U,W,T,ip,k,jmax,npmax,nmmax,kfinal,jmaxim,Tp,
        &  Tinf,UEX,UEP, Nexpt,Nexpu,Nexpw,Nexplo,jmaxd,
        &  jmaxdt,jmaxdu,jmaxdw,nm)
C-----
c sous programme permettant d'explorer la couche limite
C-----
      implicit double precision(a-h,o-z)
      dimension U(2,nmmax,jmaxim),W(2,nmmax,jmaxim),T(2,nmmax,jmaxim)
      dimension UEX(npmax,nmmax),UEP(npmax,nmmax)
      dimension Jmaxd(nmmax),Jmaxdt(nmmax),Jmaxdu(nmmax),Jmaxdw(nmmax)
      logical propu,propw,propt,protuw
C-----
      Explot = 0.5d-03
      Explou = 1.0d-03
      Explow = 1.0d-03
C-----
      jmaxm2 = jmax - 2
      jmaxm1 = jmax - 1
      jmaxp1 = jmax + 1
      nmsur2 = nm/2 + 1
C-----
      If(Nexpt.eq.1) then
        TJMAX1 = (Tp - Tinf) * T(2,k,jmaxm1)
        Xnumt = TJMAX1
        Xdent = Tinf
        Erret = dabs(Xnumt/Xdent)

```

```

        Propt = Erret.le.Explot
C--
        if(Propt) then
            Nexpt = 0
            Jmaxdt(k) = jmax
            do j = jmaxp1,jmaxim
                T(2,k,j) = T(2,k,jmax)
            enddo
        else
            Nexpt = 1
        endif
C--
        endif
C-----
        If(Nexpu.eq.1) then
            X1 = dabs(U(2,k,Jmaxm1))
            X2 = dabs(UEx(ip,k))
            Xnumu = dabs(X1 - X2)
            Xdenu = dmax1(X1,X2)
            if(Xdenu.lt.1.0d-06) then
                Erreu = 0.0
            else
                Erreu = Xnumu/Xdenu
            endif
        Propu = Erreu.le.Explou
C----
        if(Propu) then
            Nexpu = 0
            Jmaxdu(k) = jmax
            do j = jmaxp1,jmaxim
                U(2,k,j) = U(2,k,jmax)
            enddo
        else
            Nexpu = 1
        endif
C--
        endif
C-----
        If(Nexpw.eq.1) then
            if(k.eq.1.or.k.eq.nmsur2.or.k.eq.kfinal) then
                Errew = 0.0
                Propw = Erreu.le.explow
            else
                X1 = dabs(W(2,k,Jmaxm1))
                X2 = dabs(UEP(ip,k))
                Xnumw = dabs(X1 - X2)
                Xdenw = dmax1(X1,X2)
                if(Xdenw.lt.1.0d06) then
                    Erreu = 0.0
                else
                    Errew = Xnumw/Xdenw
                endif
                Propw = Errew.le.Explow
            endif
C--

```

```

        if(Propw) then
            Nexpw = 0
            Jmaxdw(k) = jmax
            do j = jmaxp1,jmaxim
                W(2,k,j) = W(2,k,jmax)
            enddo
        else
            Nexpw = 1
        endif
C--
        endif
C-----
C---
        Protuw = Propt.and.Propu.and.Propw
        if(Protuw) then
            Nexplo = 1
        else
            Nexplo = 0
            Return
        endif
C----
        XJU = Jmaxdu(k)
        XJW = Jmaxdw(k)
        XJT = Jmaxdt(k)
        Jmaxd(k) = dmax1(XJT,XJU,XJW)
C----
        return
    end
C--
C-----
C*****
        subroutine SORTIE(tetaod,alphad,ip,sp,yp,phid,U,V,W,T,Re,ialpha,
            & imail,npmax,nmmax,jmaxim,jmaxd,Uex,Uep,dyp,np,nm,
            & alphas,xc1,xc2,Ec,iter)
C    & alphas, Tp, Tinf)
C-----

C-----
C--
        implicit double precision(a-h,o-z)
        dimension U(2,nmmax,jmaxim),V(2,nmmax,jmaxim),W(2,nmmax,jmaxim)
        dimension T(2,nmmax,jmaxim),Uex(npmax,nmmax),Uep(npmax,nmmax)
        dimension phid(nmmax),sp(npmax),yp(jmaxim),Jmaxd(nmmax)
        dimension cfu(nmmax),cfw(nmmax),XNu(nmmax),XNus(nmmax)
        dimension Wc(2,nmmax,jmaxim),Uc(2,nmmax,jmaxim),gradT(nmmax)
C-----
        nmsur2 = nm/2 + 1
        nmsur4 = nm/4 + 1
        npsur2 = np/2 + 1
        npsur4 = np/4 + 1
        sinalf = dsin(alphas)
C----
C----
        if(ialpha.eq.1) then
C

```

```

        denT = 2. * dyp
C--
        if(ip.eq.npsur2) then
C----
C-----
            if(imail.eq.1) then
C-
                if(np.eq.11) then
                    Gmoy1 = 0.0
                    Gmoy2 = 0.0
                else
                    Gmoy2 = 0.0
                endif
            endif
C-----
            if(imail.eq.2) then
C-
                if(nm.eq.13) then
                    Gmoy1 = 0.0
                    Gmoy2 = 0.0
                else
                    Gmoy2 = 0.0
                endif
            endif
C-----
            do 41 k = 1,nm
                JK = jmaxd(k)
                phidk = phid(k)
C--
                do 42 j = 1,JK,50
                    write(30,420)np,nm,tetaod,alphad,phidk,ip,j,sp(ip),yp(j),T(2,k,j)
C---
                    42 continue
                    write(80,98)
C--
                    GradT(k) = ( - 3. * T(2,k,1) + 4. * T(2,k,2) - T(2,k,3)) / denT
                    write(31,421)np,nm,tetaod,alphad,phidk,ip,sp(ip),GradT(k)
C--
                    420 format(2(1x,i3),3(1x,f5.0),2(1x,i4),2(1x,f6.4),1x,f9.4)
                    421 format(2(1x,i3),3(1x,f5.0),1x,i3,1x,f4.2,1x,f9.4)
                    Gmoy2 = Gmoy2 + GradT(k)
C----
                    41 continue
                    write(30,99)
                    write(31,99)
C-----
                Xnm = nm
                Gmoy2 = Gmoy2 / Xnm
C--
                x1 = dabs(Gmoy1)
                x2 = dabs(Gmoy2)
                Erabso = dabs(x1 - x2)
                Erelat = 100. * Erabso / dmax1(x1,x2)
C----
            if(imail.eq.1) then

```

```

        write(*,480)np,nm,sp(ip),Gmoy1,Gmoy2,erelat
        write(32,480)np,nm,sp(ip),Gmoy1,Gmoy2,erelat
480 format(2(1x,i3),1x,f5.2,2(1x,f10.6),1x,f9.5)
        endif
C-----
        if(imail.eq.2) then
            write(*,481)np,nm,sp(ip),Gmoy1,Gmoy2,erelat
            write(33,481)np,nm,sp(ip),Gmoy1,Gmoy2,erelat
481 format(2(1x,i3),1x,f5.2,2(1x,f10.6),1x,f9.5)
            endif
C-----
            Gmoy1 = Gmoy2
C--
            write(*,99)
C--
            endif
C---
            endif
C-
C-----
C-----
            if(ialpha.eq.2) then
                do 10 k = 1,nmsur2,2
                    phidk = phid(k)
C---
                    do 9 j = 1,Jmaxim
                        Uc(2,k,j) = U(2,k,j) / Uex(ip,k)
                        if(alphad.eq.0.0) then
                            Wc(2,k,j) = 0.0
                        else
                            if(k.eq.1.or.k.eq.nmsur2.or.k.eq.nmmax) then
                                Wc(2,k,j) = 0.0
                            else
                                Wc(2,k,j) = W(2,k,j) / Uep(ip,k)
                            endif
                        endif
                    enddo
C---
                    9 continue
C----
                    do j = 1,Jmaxim,100

C---
                    write(63,501)tetaod,alphad,ip,j, phidk,sp(ip),yp(j),U(2,k,j),
                        & W(2,k,j),V(2,k,j),T(2,k,J),iter
                    enddo
501 format(2(1x,f3.0),2(1x,i4),1x,f6.1,2(1x,f6.4),4(1x,f9.4),1x,i3)
                    write(62,99)
                    write(63,99)
C----
                    10 continue
C----
                    do 19 j = 1,Jmaxim,100
                        write(68,501)
                        write(68,501)tetaod,alphad,ip,j,phidk,sp(ip),yp(j),u(2,7,j),
                            & V(2,7,j),t(2,7,j)

```

```

19 continue
c----
do 14 k = 1,nmsur2,2
    phidk = phid(k)
c---
    write(70,502)
    write(70,502)tetaod,alphad,phidk,ip,yp(501),sp(ip),U(2,k,501),
    & w(2,k,501),V(2,k,501)
c---
14 continue
c-----
    write(74,503)tetaod,alphad,ip,yp(251),sp(ip),Uc(2,1,251),
    & Uc(2,nmsur4,251),Uc(2,nmsur2,251)
    write(75,503)tetaod,alphad,ip,yp(501),sp(ip),Uc(2,1,501),
    & Uc(2,nmsur4,501),Uc(2,nmsur2,501)
    write(76,503)tetaod,alphad,ip,yp(651),sp(ip),Uc(2,1,651),
    & Uc(2,nmsur4,651),Uc(2,nmsur2,651)
c---
    write(77,503)tetaod,alphad,ip,yp(251),sp(ip),Wc(2,1,251),
    & Wc(2,nmsur4,251),Wc(2,nmsur2,251)
    write(78,503)tetaod,alphad,ip,yp(501),sp(ip),Wc(2,1,501),
    & Wc(2,nmsur4,501),Wc(2,nmsur2,501)
    write(79,503)tetaod,alphad,ip,yp(651),sp(ip),Wc(2,1,651),
    & Wc(2,nmsur4,651),Wc(2,nmsur2,651)
c-----
c    write(*,504)tetaod,alphad,ip,yp(501),sp(ip),Td(2,1,701),
c    & Td(2,nmsur4,701),Td(2,nmsur2,701)
c    write(83,504)tetaod,alphad,ip,yp(501),sp(ip),Td(2,1,501),
c    & Td(2,nmsur4,501),Td(2,nmsur2,501)
c-----
    write(80,503)
    write(80,503)tetaod,alphad,ip,yp(2001),sp(ip),T(2,1,2001),
    & T(2,7,2001),T(2,13,2001)
    write(81,503)tetaod,alphad,ip,yp(501),sp(ip),T(2,1,501),
    & T(2,nmsur4,501),T(2,nmsur2,501)
    write(82,503)tetaod,alphad,ip,yp(651),sp(ip),T(2,1,651),
    & T(2,nmsur4,651),T(2,nmsur2,651)
c---
    write(90,502)tetaod,alphad,phid(nmsur2),ip,yp(701),sp(ip),
    & Uc(2,nmsur2,701),T(2,nmsur2,701),Wc(2,nmsur2,701)
    write(91,503)tetaod,alphad,ip,yp(251),sp(ip),V(2,1,251),
    & V(2,nmsur4,251),V(2,nmsur2,251)
    write(92,503)tetaod,alphad,ip,yp(501),sp(ip),V(2,1,501),
    & V(2,nmsur4,501),V(2,nmsur2,501)
    write(93,503)tetaod,alphad,ip,yp(651),sp(ip),V(2,1,651),
    & V(2,nmsur4,651),V(2,nmsur2,651)
    write(94,503)tetaod,alphad,ip,yp(801),sp(ip),V(2,1,801),
    & V(2,nmsur4,801),V(2,nmsur2,801)
    write(95,503)tetaod,alphad,ip,yp(251),sp(ip),U(2,1,251),
    & U(2,nmsur4,251),U(2,nmsur2,251)
    write(96,503)tetaod,alphad,ip,yp(501),sp(ip),U(2,1,501),
    & U(2,nmsur4,501),U(2,nmsur2,501)
    write(97,503)tetaod,alphad,ip,yp(651),sp(ip),U(2,1,651),
    & U(2,nmsur4,651),U(2,nmsur2,651)
c--

```

```

        write(40,503)tetaod,alphad,ip,yp(251),sp(ip),W(2,1,251),
        & W(2,nmsur4,251),W(2,nmsur2,251)
        write(41,503)tetaod,alphad,ip,yp(501),sp(ip),W(2,1,501),
        & W(2,nmsur4,501),W(2,nmsur2,501)
        write(42,503)tetaod,alphad,ip,yp(651),sp(ip),W(2,1,651),
        & W(2,nmsur4,651),W(2,nmsur2,651)
c---

502 format(3(1x,f6.2),1x,i3,2(1x,f6.4),3(1x,f9.4))
503 format(2(1x,f4.0),1x,i3,2(1x,f5.3),3(1x,f9.4))
504 format(2(1x,f4.0),1x,i3,2(1x,f5.3),3(1x,f6.2))
c-
c-----
c Détermination du nombre de Nusselt et des coefficients de frottement
c-----
c      den1 = 2.* dyp / dsqrt(Re)
      den1a = 4.* dyp * xc2
      den1b = xc1 * Ec * dsqrt(Re)
      den1 = den1a / den1b

      den2a = 1.* dyp * dsqrt(Re) * xc2
      den2 = den2a / xc1
      do 15 k = 1,nmsur2,2
      phidk = phid(k)
      XNu(k) = ( 3.* T(2,k,1) - 4.* T(2,k,2) + T(2,k,3)) / den1
      Cfu(k) = (- 3.* U(2,k,1) + 4.* U(2,k,2) - U(2,k,3)) / den2
      Cfw(k) = (- 3.* W(2,k,1) + 4.* W(2,k,2) - W(2,k,3)) / den2
      XNus(k) = XNu(k)
c----
      write(64,500)tetaod,alphad,ip,phidk,sp(ip),XNus(k),Cfu(k),
      & Cfw(k)
15 continue
c--
500 format(2(1x,f3.0),1x,i3,1x,f5.0,1x,f6.3,3(1x,f11.4))
c-----
      write(65,600)tetaod,alphad,ip,sp(ip),XNus(1),XNus(7),XNus(13),
      & XNus(19),Xnus(25)
      write(66,600)tetaod,alphad,ip,sp(ip),Cfu(1),Cfu(7),Cfu(13),
      & Cfu(19),Cfu(25)
      write(67,600)tetaod,alphad,ip,sp(ip),Cfw(1),Cfw(7),Cfw(13),
      & Cfw(19),Cfw(25)
c----
600 format(2(1x,f3.0),1x,i3,1x,f6.3,5(1x,f7.4))
c-----
      endif
c-----
98 format(/)
99 format(/)
c-----
      return
      end
c-----

```

RESUME

Une étude numérique des transferts par convection forcée laminaire autour d'un cône tournant autour de son axe de révolution incliné est présentée. L'écoulement, de type couche limite, est vertical ascendant et le fluide considéré est newtonien. La vitesse extérieure à la couche limite est déterminée par [7]. A l'aide d'un modèle numérique, les équations de continuité, de Navier-Stokes et de conservation de l'énergie sont résolues par une méthode implicite aux différences finies. L'influence du paramètre de rotation B , de l'angle d'inclinaison et de l'ouverture du cône sur les transferts est analysée. Dans ces résultats, le profil de température, la vitesse méridienne, la vitesse normale, le nombre de Nusselt et les coefficients de frottements pariétaux méridien et azimutal sont explorés sous forme de courbes. Le couplage de la convection a été étudié en fonction de l'ampleur du paramètre de rotation B .

ABSTRACT

A numerical study of transfers by forced laminar convection around a cone rotating around an inclined axis of revolution is presented. The flow, of the boundary layer type, is ascending vertical and the fluid considered is Newtonian. The speed outside the boundary layer is determined by [7]. Using a numerical model, the continuity, Navier-Stokes and energy conservation equations are solved by an implicit finite difference method. The influence of the rotation parameter B on transfers is analyzed. The results are presented by the temperatures profiles, the meridian velocity, the normal velocity, the Nusselt number and as well as the meridian friction coefficient. Finally we 've got the result by mixed convection and rotary.

Mots-clés :

Convection, mixte, rotatoire et forcée tridimensionnelle, cône, prédominance